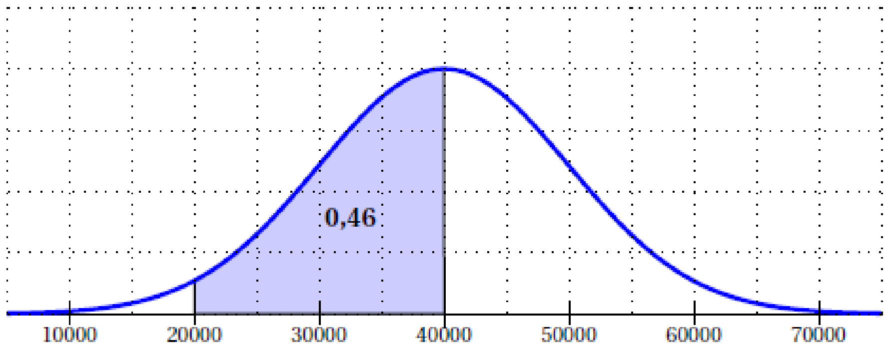
Exercices entrainement lois continues corrigés

Exercice 1 : AdS novembre 2016

Une norme de qualité stipule qu'une marque peut commercialiser ses ampoules si leur durée de vie est supérieure à 20 000 heures avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque ÉclaireBien. On admet que X suit la loi normale dont la fonction de densité est tracée ci-après.
L'aire grisée comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 0,46.



a. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 40000$ donc l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\mu = 40000$.

b. Par symétrie, $p(20000 < X < 40000) = p(40000 < X < 60000)$.
Donc $p(20000 < X < 60000) = 2 \times p(20000 < X < 40000) = 2 \times 0,46 = 0,92$.

c. Pour des raisons de symétrie, $p(X \leqslant 20000) = p(X \geqslant 60000)$.
De plus, $p(X \leqslant 20000) + p(20000 < X < 60000) + p(X \geqslant 60000) = 1$.
On sait que $p(20000 < X < 60000) = 0,92$ donc $p(X \leqslant 20000) = p(X \geqslant 60000) = \dfrac{1-0,92}{2} = 0,04$.
On en déduit que $p(X > 20000) = p(20000 < X < 60000) + p(X \geqslant 60000) = 0,92 + 0,04 = 0,96$.
La probabilité est supérieure à 0,95 donc la marque ÉclaireBien pourra commercialiser ses ampoules.

2. On note Y la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque BelleLampe. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 42 000 et d'écart-type 15 000.

a. On trouve à la calculatrice $p(Y > 20000) \approx 0,93$ donc la marque BelleLampe ne pourra pas commercialiser ses ampoules.

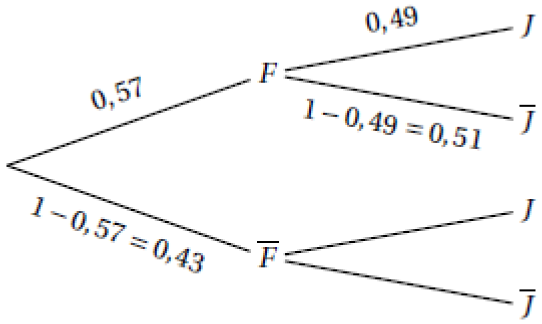
b. On trouve à la calculatrice que l'arrondi à l'unité du réel a tel que $p(Y < a) = 0,05$ est 17327.
Donc la probabilité que la durée de vie d'une lampe de la marque BelleLampe soit inférieure à 17 327 heures est égale à 0,05.

Exercice 2 :

Partie A

Une enquête révèle que dans un lycée, 67 % des élèves jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On sait de plus que 57 % des élèves du lycée sont des filles et que, parmi elles, 49 % jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On choisit au hasard un élève du lycée.
On note : J l'évènement : « l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo », et F l'évènement : « l'élève est une fille ».

1. On complète l'arbre proposé grâce aux données du texte :



2. L'événement « l'élève est une fille qui joue régulièrement aux jeux vidéo » est $F \cap J$:
$p(F \cap J) = p(F) \times p_F(J) = 0,57 \times 0,49 = 0,2793$
3. L'événement « l'élève est un garçon qui joue régulièrement aux jeux vidéo » est $\overline{F} \cap J$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(J) = p(F \cap J) + p(\overline{F} \cap J)$.
On sait que 67 % des élèves jouent aux jeux vidéo, donc $p(J) = 0,67$.
On a démontré dans la question précédente que $p(F \cap J) = 0,2793$.
On déduit donc que $p(J) - p(F \cap J) = p(\overline{F} \cap J) \iff 0,67 - 0,2793 = p(\overline{F} \cap J)$ autrement dit $p(\overline{F} \cap J) = 0,3907$.
La probabilité que l'élève soit une garçon qui joue régulièrement aux jeux vidéo est 0,3907.
4. La probabilité que l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo sachant que c'est un garçon est $p_{\overline{F}}(J)$:
$$p_{\overline{F}}(J) = \frac{p(\overline{F} \cap J)}{p(\overline{F}} = \frac{0,3907}{0,43} \approx 0,9086$$

Partie B

Zoé, grande amatrice de jeux vidéo, souhaite s'offrir une tablette numérique pour son anniversaire. Elle pense commander sur un site web marchand une tablette de marque Alpha. Elle s'inquiète quant à l'autonomie de sa tablette en mode veille. On admet que l'on peut modéliser la durée d'autonomie de chaque tablette de marque Alpha en mode veille par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart-type $\sigma = 10$. La durée X est exprimée en heures.

1. Une durée de 5 jours correspond à $5 \times 24 = 120$ heures. On cherche donc $p(X < 120)$.
D'après le cours, comme 120 correspond à la moyenne de la loi normale, $p(X < 120) = 0,5$.
La probabilité que la tablette numérique ait en mode veille une autonomie strictement inférieure à 5 jours est de 0,5.
2. À la calculatrice, on trouve $p(96 \leqslant X \leqslant 144) \approx 0,984$.
La durée X s'exprime en heures ; 96 heures correspondent à 4 jours et 144 heures correspondent à 6 jours.
La probabilité que la tablette numérique ait, en mode veille, une autonomie entre 4 et 6 jours est de 0,984.

Exercice 3 : QCM

PARTIE A :

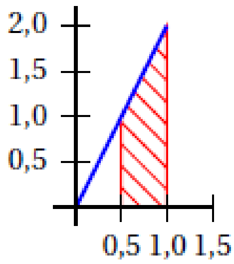
1. $P(X \geq 100) = Normfrep(100, 10^{99}, 90{,}6) \approx 0{,}048$ réponse c.
2. $P(\mu - 20 \leq Y \leq \mu + 20) = P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$ par propriété car $\sigma = 10$: réponse d.

PARTIE B :

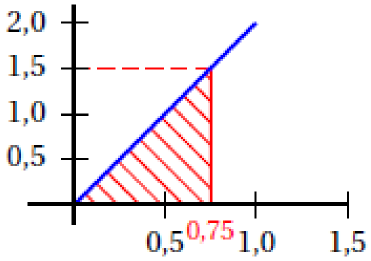
3. Réponse b. car f'est négative sur [-5 ;1] donc f est décroissante sur [-5 ;1].
4. Réponse b. f est concave sur [-5 ;1] car f' est décroissante sur [-5 ;1] donc f est concave sur [-5 ;1].

Exercice 4 :

La fonction f est définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 2x$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f.
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1. **a.** La surface hachurée est un trapèze rectangle.
L'aire d'un trapèze est donné par la formule
$$\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(1+2) \times 0{,}5}{2} = 0{,}75.$$
b. On peut donc dire que $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1) = 0{,}75$.
2. La probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$ est égale à l'aire de la surface hachurée ci-dessous :



Cette partie hachurée est délimitée par un triangle rectangle dont l'aire est $\frac{0{,}75 \times 1{,}5}{2} = 0{,}5625$.
Donc $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = 0{,}5625$.

Exercice 5 :

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

PARTIE A

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Pour une clé, il n'y a que deux issues : elle est défectueuse, avec une probabilité $p = 0{,}015$, ou elle n'est pas défectueuse, avec la probabilité $1 - p$.
   La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
   On peut en déduire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de clés défectueuses dans le lot de 100 clés suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}015$.
2. Quand une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité de l'événement $X = k$ est donnée par :
   $$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
   On en déduit que $p(X = 0) \approx 0{,}221$ et $p(X = 1) \approx 0{,}336$.
3. Au plus deux clés soient défectueuses correspond à l'événement $X \leqslant 2$:
   $p(X \leqslant 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \approx 0{,}221 + 0{,}336 + 0{,}253 \approx 0{,}810$
   La probabilité qu'au plus deux clés soient défectueuses est environ 0,810.

Partie B

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle $[98 ; 103]$. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle $[28 ; 33]$.

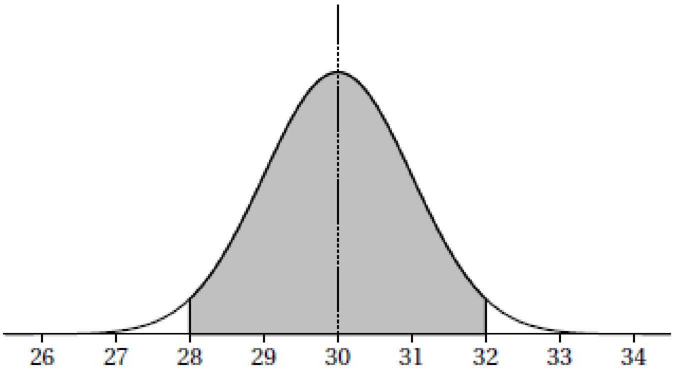
1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

   Une clé est conforme pour la lecture quand $98 \leqslant R \leqslant 103$, sachant que la variable aléatoire R suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 1$.

   La calculatrice donne $p(98 \leqslant X \leqslant 103) \approx 0,976$.

2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.

   Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.



   La fonction densité d'une loi normale d'espérance μ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \mu$. On sait que la droite d'équation $x = 30$ est axe de symétrie donc on peut en déduire que $\mu = 30$.

   D'après le cours, pour toute variable aléatoire W suivant une loi normale de paramètres μ et σ, on sait que $p(\mu - 2\sigma \leqslant W \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

   D'après le texte, $p(28 \leqslant W \leqslant 32) \approx 0,95$ et on sait que $\mu = 30$; donc $2\sigma = 2$ et donc $\sigma = 1$.