Lois normales et calculatrices

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a \leqslant X \leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	`normalFrep`(a,b,μ,σ) ou `normalCdf`(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd `normCD` (a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leqslant k) = \alpha$	`FracNormale`(α,μ,σ) ou `invNorm`(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN `InvNormCD`(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

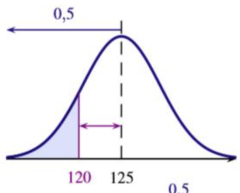
EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;20{,}25)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

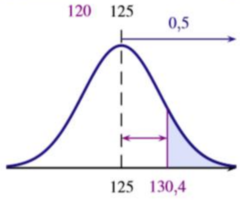
1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \geqslant 130{,}4)$; $P(X \geqslant 118{,}7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0{,}02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0{,}81$.

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0{,}495$.

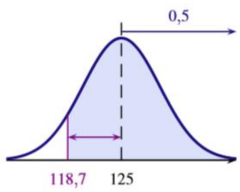
   b)
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0{,}5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}133 \end{aligned}$$



   c)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130{,}4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &= 0{,}5 - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &\approx 0{,}115 \end{aligned}$$



   d)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118{,}7) &= P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0{,}5 + P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}919 \end{aligned}$$

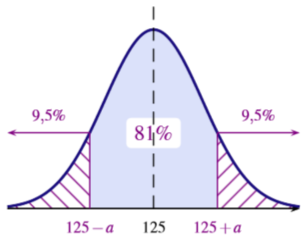


2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0{,}871$ pour $a \approx 130{,}09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or

$$P(X \geqslant b) = 0{,}02 \iff 1 - P(X < b) = 0{,}02 \iff P(X < b) = 0{,}98$$

   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134{,}242$.

4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81$.
   La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(125;4{,}5^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
   On en déduit que :



$$\begin{aligned} P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81 &\iff 1 - 2 \times P(X < 125 - a) = 0{,}81 \\ &\iff P(X < 125 - a) = \frac{1 - 0{,}81}{2} = 0{,}095 \end{aligned}$$

   Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119{,}102$ d'où $a \approx 8{,}898$ et $125 + a \approx 130{,}898$.
   Donc $I = [119{,}102; 130{,}898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119{,}1; 130{,}9]$)