TL

Chapitre 7 : Lois à densité

1- Lois à densité sur un intervalle :

a- Variable aléatoire continue :

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

b- Fonction de densité :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

Ex 1 : Montrer que la fonction f définie ci-dessous est une fonction de densité de probabilité : $f(x) = \begin{cases} 0{,}4\,x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0{,}8x - 0{,}4 & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

c- Loi de probabilité d'une variable aléatoire à densité :

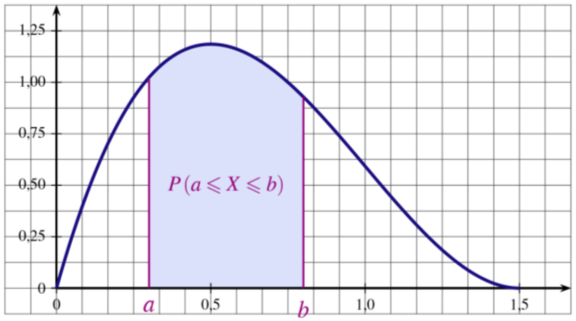
Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X \in [a; b]$ est :

$$P(X \in [a;b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

Rqe 1 : $P(a \leq X \leq b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe C_f représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité suivante : $f(t) = \frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3}$ pour tout $t \in [0 ; 1{,}5]$:



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0; 1{,}5]$: c'est possible car f n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité (à vérifier).

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I. Pour tous réels $a\ et\ b$ appartenant à I :

$$P(X = a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$$P(X \geq a) = P(x > a) = 1 - P(X \leq a)$$

Ex 2 : X est la variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 2]$ dont la loi de probabilité a pour densité de probabilité la fonction f définie à l'exemple 1. Calculer $P(0 \leq X \leq 1)$; $P(1{,}5 \leq X \leq 2)$; $P(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5)$.

d- Espérance :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a; b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel :

$$E(X) = \int_a^b t\, f(t)dt$$

Ex 3 : Calculer $E(X)$ pour la variable aléatoire de densité f définie à la rqe 1.

e- Probabilité conditionnelle :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I. Soient des intervalles J_1 et J_2contenus dans I, tels que $P(X \in J_2) \neq 0$.

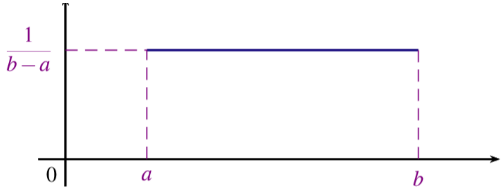
$$\boxed{P_{X\in J_2}(X \in J_1) = \frac{P(X \in X_1 \cap X_2)}{P(X \in X_2)}}$$

Ex 4 : Reprendre l'exemple précédent pour calculer $P_{X>0,5}(X < 1)$.

2- Loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$:

a- Définitions et propriétés :

Soient $a\ et\ b$ deux réels tels que $a < b$. Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a; b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$



La fonction définie sur $[a\,;b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a\,;b]$:

- f est continue et positive sur $[a\,;b]$
- $\int_a^b \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. Pour tout intervalle $[c; d]$ contenu dans $[a; b]$ on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

En effet :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$$

b- Espérance :

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. L'espérance de X est :

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

En effet : $E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

Ex 5 : Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après-vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle [0,5;9,5].
1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

3- Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$:

a- Une approche historique :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $B(n; p)$. L'espérance mathématique est $E(X) = np$; l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

La fonction de $Gauss$:

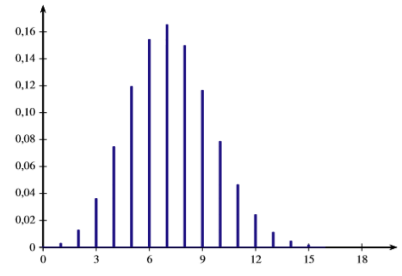
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p. On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes : $z_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$. Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :

$$P(Z_n = z_k) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(X_n = k) = p_k$$

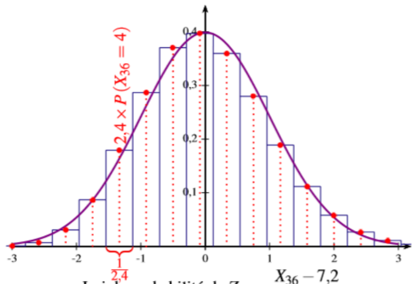
Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k, alors Z_n prend la valeur $\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k.

On a représenté graphiquement, pour $X_n[E(X_n) - 3\,\sigma_n; E(X_n) + 3\,\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n = 36$ et $n = 400$ avec $p = 0{,}2$. La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.

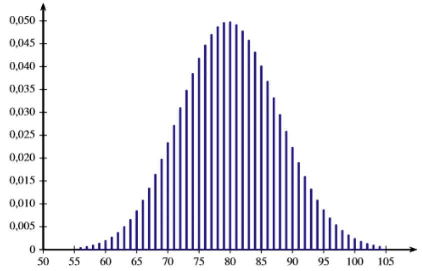
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n = z_k) = p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n \times P(X_n = k)$et $\frac{1}{\sigma_n}$.



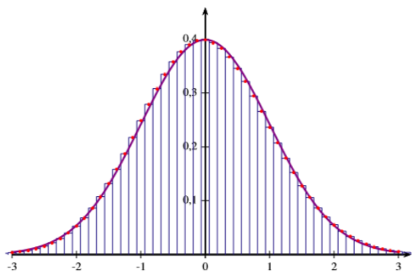
Loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0{,}2$



Loi de probabilité de $Z_{36} = \frac{X_{36} - 7{,}2}{2{,}4}$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}2$



Loi de probabilité de $Z_{400} = \frac{X_{400} - 80}{8}$

La «courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

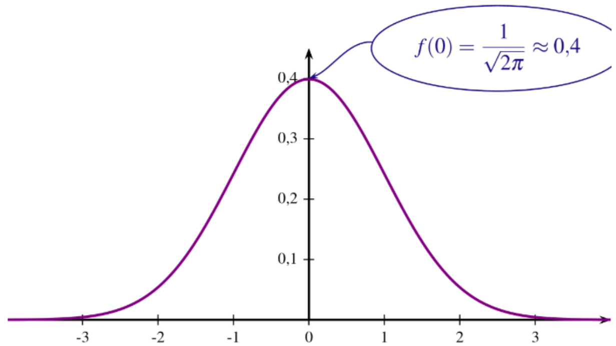
Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction la fonction de Gauss : $P(a \leq Z_n \leq b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

b- La loi normale centrée réduite :

> Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0; 1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Courbe représentative :

Pour tout réel x on a $f(x) = f(-x)$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

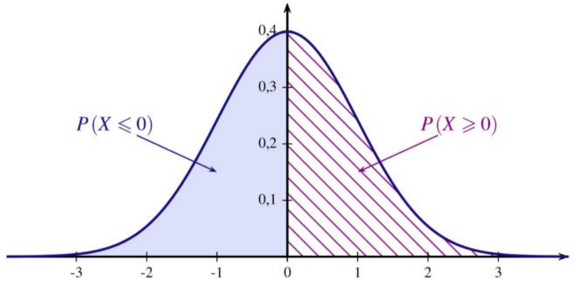


Espérance et écart-type :

> Soit une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

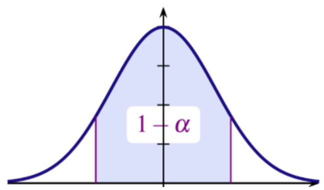
Propriété :

$$\boxed{P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}}$$



Intervalle associé à une probabilité donnée :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On retient en particulier :

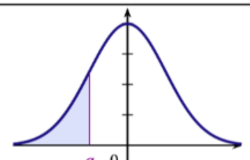
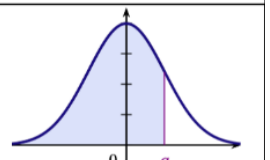
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$:

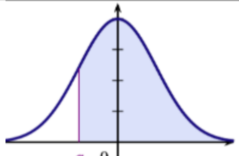
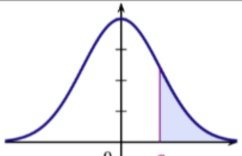
$$\boxed{P(-1{,}96 \leq X \leq 1{,}96) \approx 0{,}95}$$

Calculs :

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles. On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leq a)$ ou $P(X \geq a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique		
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X \leqslant a)$

Probabilité	$P(X \geqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique		
Calcul	$0{,}5 + P(a \leqslant X < 0)$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

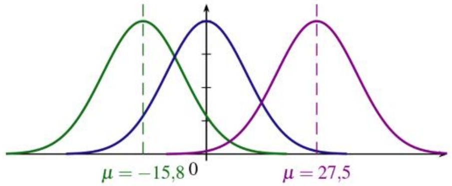
4- Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$:

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

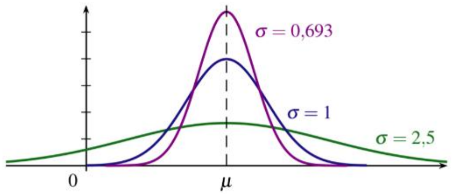
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.

- La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

- L'espérance μ de la loi normale est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.

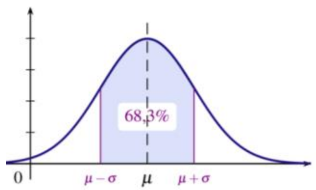


- L'écart-type $\sigma > 0$ de la loi normale est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.

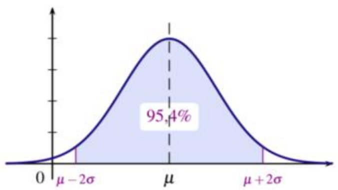


Intervalles de fluctuation d'une loi normale : Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors :

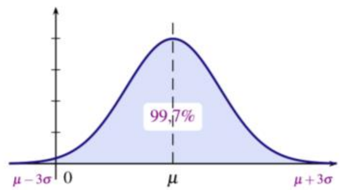
$$\boxed{\begin{array}{c} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683 \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954 \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997 \end{array}}$$



$X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$



$X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$



$X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$