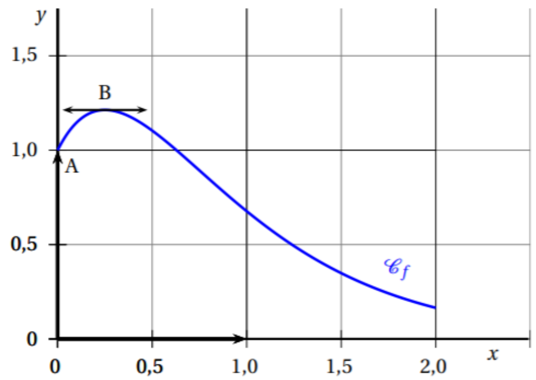
Révisions Bac L – Pâques 2018 – DM – Traiter sur feuille 2 exercices au choix.

Exercice 1

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
On suppose que f est deux fois dérivable et on note f' la fonction dérivée de f.

On sait que :

- le point A(0 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0,25 est parallèle à l'axe des abscisses.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On suppose que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

1. En utilisant le graphique et les données de l'énoncé, déterminer $f(0)$ et $f'(0,25)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs des réels a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet par ailleurs que $f'(x) = (2-8x)\mathrm{e}^{-2x}$ et $f''(x) = (16x-12)\mathrm{e}^{-2x}$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

1. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,2]$ puis en déduire les variations de f sur $[0\,;\,2]$.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $F(x) = (-2x-1,5)\mathrm{e}^{-2x}$.
   a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,2]$.
   b. En déduire l'aire exacte $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine D du plan situé entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
   c. Déterminer la valeur moyenne, arrondie à 10^{-1}, de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Exercice 2 :

On étudie les abonnements à un grand quotidien de 2011 à 2015.
Le tableau suivant indique, pour chaque année de 2011 à 2015, le nombre d'abonnés.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés	620 214	610 156	575 038	578 282	555 239
Taux d'évolution annuel		−1,62 %	−5,76 %	0,56 %	−3,98 %
Taux d'évolution par rapport à l'année 2011		−1,62 %	−7,28 %	−6,76 %	−10,48 %

Partie A

1. Retrouver par le calcul, le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013.
2. Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015 est environ de −2,73 %. Justifier.

Partie B

Afin d'étudier cette évolution, on suppose qu'à l'avenir, tous les ans, 10 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement à ce quotidien mais que l'on compte 52 milliers de nouveaux abonnés.
En 2011, le nombre d'abonnés est égal, après arrondi, à 620 milliers.
On s'intéresse, pour tout entier naturel n, au nombre d'abonnés, en milliers, pour l'année $(2011+n)$.
On note u_n le nombre d'abonnés en milliers pour l'année $(2011+n)$.
On fixe donc $u_0 = 620$.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2012 suivant ce modèle.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 52$.
3. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 100 \times 0,9^n + 520$.
4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.
   a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin d'afficher l'année à partir de laquelle le quotidien sera en difficulté financière.

Variables	N un nombre entier naturel non nul U un nombre réel
Initialisation	Affecter à U la valeur 620 Affecter à N la valeur 0
Traitement	Tant que ... Affecter à U la valeur .... Affecter à N la valeur .... Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

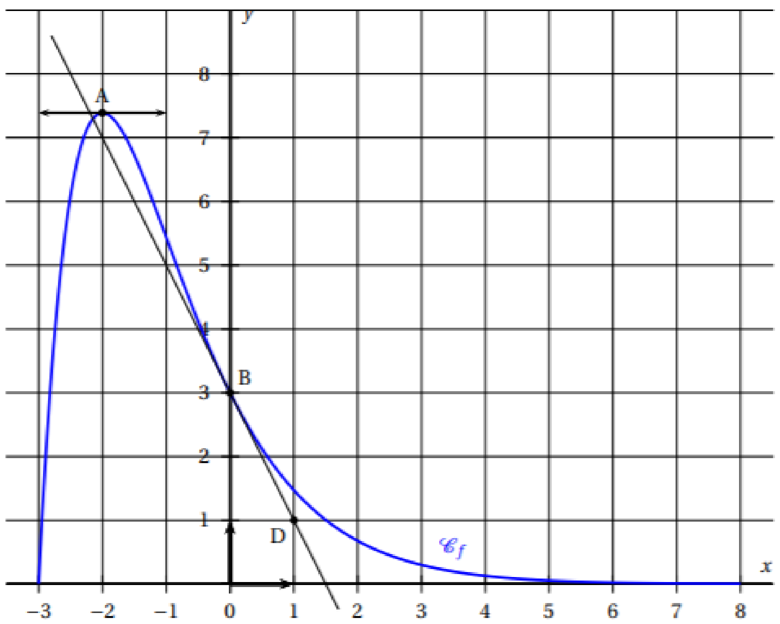
b. Résoudre l'inéquation $u_n \leqslant 540$.

c. Déterminer à partir de quelle année le quotidien sera en difficulté financière. Indiquer la démarche.

Exercice 3 :

Partie A

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$. On note f' sa dérivée.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2.
B est le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(0\,;3)$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est horizontale.
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0 et elle passe par le point D$(1\,;\,1)$.



À l'aide du graphique :

1. Donner la valeur de $f'(-2)$.
2. Interpréter géométriquement $f'(0)$ et donner sa valeur.
3. La fonction f est-elle convexe sur $[-2\,;\,2]$?

Partie B

On admet désormais que la fonction f de la partie A est définie sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$ par

$$f(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	dériver $(x+3)*\exp(-x)$
	$\exp(-x)+(x+3)*(-\exp(-x))$
2	factoriser (dériver$(x+3)*\exp(-x)$)
	$(-x-2)*\exp(-x)$

1. Étudier le signe de la dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α sur $[-3\,;\,-2]$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. **a.** Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$ par :

$$F(x) = (-x-4)\mathrm{e}^{-x}$$

   est une primitive de f sur le même intervalle.
   b. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 :

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375 % de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.
   On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
   On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013+n)$ avec $u_0 = 4\,000$.

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}99625u_n + 10{,}2$.

b. Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3995{,}2$.

3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - 2720$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 0{,}99625 \times d_n$.

b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Calculer d_0.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de d_n, en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

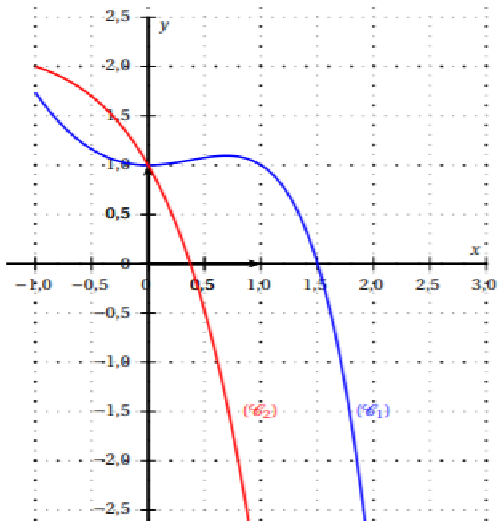
4. a. Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.

b. À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.

Exercice 5

La courbe $(\mathscr{C}_1)$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-1 ; 2]$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.
La courbe $(\mathscr{C}_2)$ ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f''.

Le point A(0; 1) est situé sur la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
Le point B est le point d'intersection de $(\mathscr{C}_2)$ avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de cisse de B est 0,37.
La tangente à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A est horizontale.



1. Par lecture graphique,

a. Donner la valeur de $f(0)$.

b. Donner la valeur de $f'(0)$.

c. Étudier la convexité de f sur $[-1 ; 2]$. Justifier la réponse.

2. On admet désormais que la fonction f est définie pour tout réel x dans $[-1 ; 2]$ par :

$$f(x) = (1-x)e^x + x^2.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) := (1-x) * \exp(x) + x^2$ $\rightarrow (1-x)e^x + x^2$
2	factoriser(dériver($f(x)$)) $\rightarrow x(2-e^x)$
3	primitive ($f(x)$) $\rightarrow \frac{1}{3}x^3 + (-x+2)e^x$

a. Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-1 ; 2]$.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-1 ; 2]$.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

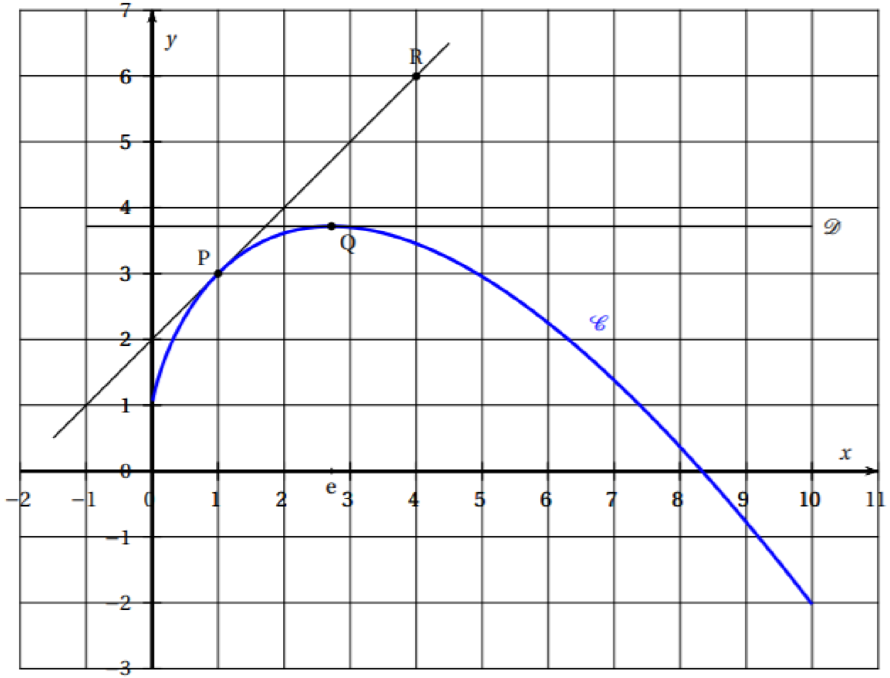
4. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point d'abscisse 1.

5. a. Justifier la ligne 3 du tableau de calcul formel.

b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1 ; 1]$. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C}_1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.

Exercice 6 :

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.



On considère les points P $(1\,;\,3)$ et R $(4\,;\,6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $\mathrm{e} \approx 2,718$.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe v au point Q.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?

   a. $y = 2x+1$ **b.** $y = x+2$ **c.** $y = 2x+2$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Une seule de ces trois propositions est exacte :
   a. f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;
   b. f est concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;
   c. f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   Laquelle ?
4. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux entiers consécutifs.

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$.
   b. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   c. Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{5}{4}x^2 + x - 7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.