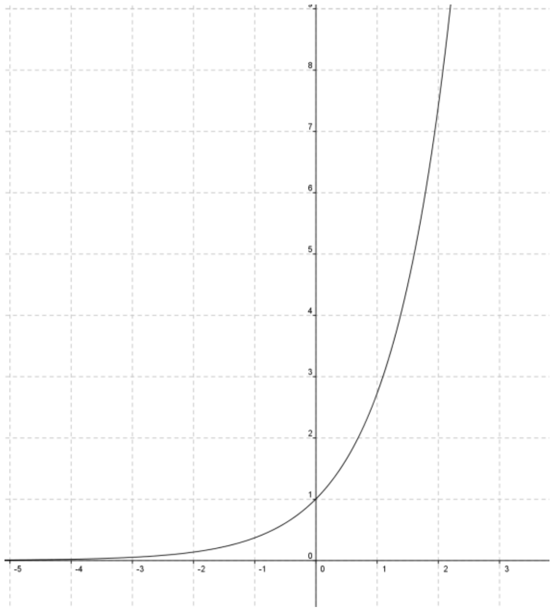
TL

Chapitre 6 - Logarithme népérien

1. Définitions :

On a vu que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

Ainsi, d'après le tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre $k > 0$, l'équation $e^x = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Définition : Pour tout nombre $k > 0$, cette solution, le nombre dont l'exponentielle est k, est appelé le logarithme népérien de k, noté $ln(k)$.

Le nombre $ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$ et vérifie $e^{\ln(x)} = x$
et $\ln(e^x) = x$ puisque $\ln(e^x)$ est le nombre qui a pour exponentielle e^x donc c'est x !

Exemples :

1) Le nombre dont l'exponentielle est 1 est 0 ($e^0 = 1$) donc $ln(1) = 0$.
2) Les nombre dont l'exponentielle est e est 1 ($e^1 = e$) donc $ln(e) = 1$
3) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de $ln(2)$ (le nombre dont l'exponentielle est 2 : ($e^x = 2$)

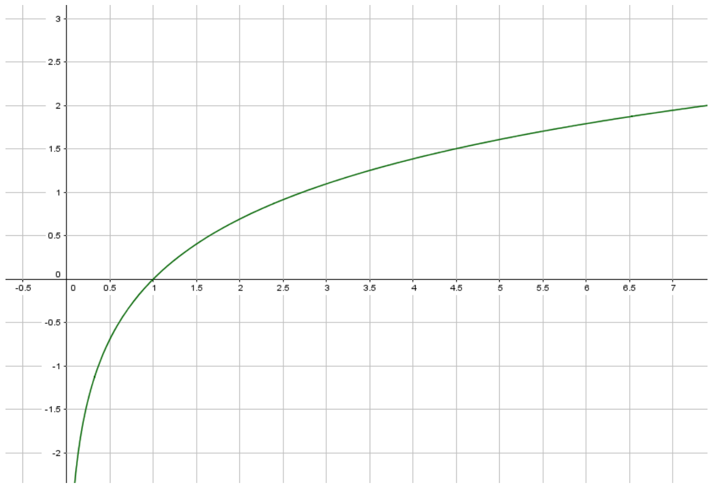
Exercices : 6 à 21 p 149, 29 à 31 p 150

Définition : la fonction qui à tout nombre x strictement positif associe son logarithme est appelée la fonction logarithme népérien, notée ln.

2. Propriétés fonctionnelles :

Propriété : pour tous réels a et b strictement positifs,
$ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et
$ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$
La fonction logarithme est strictement croisssante sur $\mathbb{R}_+^*$

Preuve : Soit a et b deux réels strictement positifs, alors:
$ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow e^{ln(a)} = e^{ln(b)} \Leftrightarrow a = b$ et
$ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow e^{ln(a)} < e^{ln(b)} \Leftrightarrow a < b$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Exemples :

1) Résoudre $\ln(x) = \ln(5)$
2) Résoudre $\ln(x) > \ln(2)$
3) Résoudre $\ln(x) < 0$

Exercices : 22 à 28 p 149

Propriété : La fonction logarithme népérien ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

Preuve : On a $e^{ln(x)} = x$ donc en dérivant cette égalité : $ln'(x) \times e^{ln(x)} = 1$ donc $ln'(x) \times x = 1$ et $ln'(x) = \frac{1}{x}$

Exemple : Dériver $f(x) = 3\ln(x) + 5,\ x > 0,\ g(x) = xln(x) - x, x > 0$.

Théorème : $ln(x)$ est négatif pour $x\ \in]0;1[$, positif pour $x\ \in]1;+\infty[$

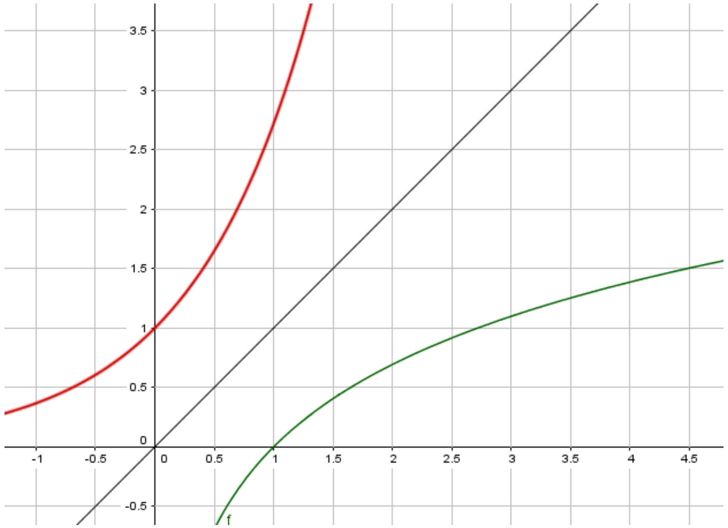
Preuve : ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln(1) = 0$.

Exercices : 32 à 41 p 150

Propriété : La fonction logarithme népérien ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Preuve : calculons sa dérivée seconde : $ln'(x) = \frac{1}{x}$, : $ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$.

Propriété : Positions relatives :
pour tout $x \in \mathbb{R}, x < \exp(x)$ et
pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) < x < \exp(x)$



Preuve : Etablir le tableau de variation de $f(x) = exp(x) - x$. En déduire son signe et la position relative des courbes des fonctions exponentielle et de la droite $y = x$.
Etablir le tableau de variations de $g(x) = x - ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire son signe et la position relative des courbes des fonctions logarithme et de la droite $y = x$.

Exercices : 42 à 53 p 151

3. Propriétés algébriques :

Propriété : pour tous nombres a, b strictement positifs, $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$

Preuve :
a, b deux réels strictement positifs quelconques, on a $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$ donc $\ln(a) + \ln(b)$ est le nombre réel pour lequel l'exponentielle vaut $a \times b$, c'est donc le nombre $\ln(a \times b)$ et on a bien $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$.

Exemples : $ln(10) = \ln(5 \times 2) = \ln(5) + \ln(2)$.

$ln(18) = \ln(3 \times 3 \times 2) = \ln(3) + \ln(3) + \ln(2) = 2\ln(3) + \ln(2)$

Théorème : pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

Preuve :
D'une part : $ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln(a)$
D'autre part : $ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$ et donc $\ln(a) = ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$ et $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Exemples : $ln(10) - \ln(5) = \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln(2)$,
$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$.

Conséquence : pour tout nombre réel a strictement positif, n entier relatif :
$ln(a^n) = n \times ln(a)$

Démonstration :
Si $p \geq 1 : ln(a^p) = ln(a \times a \times \ldots \times a) = ln(a) + ln(a) + \cdots + ln(a) =$
$p \times ln(a)$
$Si\ p \leq 1 : ln(a^p) = ln\left(\frac{1}{a^{-p}}\right) = -\,ln(a^p) = -\big(-pln(a)\big) = pln(a)$
$Si\ p = 0 : ln(a^0) = ln(1) = 0 = 0 \times ln(a)$

Exemples : $ln(2^8) = 8 \times \ln(2) = 8\ln(2)$.

$ln(5^{-3}) = -3\ln(5)$.

On place de l'argent avec intérêts composés de 2% par an. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Théorème : pour tout nombre réel a strictement positif : $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times ln(a)$

Démonstration : $ln(a) = \ln\big(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\big) = \ln\big(\sqrt{a}\big) + \ln\big(\sqrt{a}\big) = 2\ln(\sqrt{a})$. Donc
$ln\big(\sqrt{a}\big) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemple : $ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(3)$
Exercices : 54 à 71 p 151

Exercices type bac : 87, 90, 92, 123 à 133 p 150, Devoir à la maison : 133 p 161