TL - DM Intégrale -

Ex 31 p193 -

1) a) $f(x)=10(x+1)$

$F(x)=10\left(\frac{x^2}{2}+x\right)$

En effet $F'(x)=10\left(\frac{2x}{2}+1\right)$
$=10(x+1)$

b) $g(x)=x^2-1$, $G(x)=\frac{x^3}{3}-x$

car $G'(x)=3\frac{x^2}{3}-1=x^2-1$.

c) $h(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $H(x)=x+\frac{1}{x}$

car $H'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

d) $k(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$, $K(x)=\frac{x^3}{9}+\frac{3}{x}$.

car $K'(x)=\frac{3x^2}{9}-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$.

e) $l(x)=\frac{x^3-1}{x^2}$, $L(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$

car $L'(x)=\frac{2x}{2}-\frac{1}{x^2}=x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-1}{x^2}$.

2) On a $F(x)=10\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C$

pour $C\in\mathbb{R}$ et $F(1)=0$

Donc $10\left(\frac{1}{2}+1\right)+C=0$

$\frac{3}{2}\times 10+C=0$

$15+C=0$

$C=-15$

D'où $F(x)=10\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-15$.

• De même $H(x)=x+\frac{1}{x}+C_1$, $C_1\in\mathbb{R}$

et $H(1)=1$ ie $1+\frac{1}{1}+C_1=1$

Donc $C_1=-1$ et $H(x)=x-1+\frac{1}{x}$.

• Enfin $K(x)=\frac{x^3}{9}+\frac{3}{x}+C_2$

et $K(3)=0$ ie $\frac{27}{9}+\frac{3}{3}+C_2=0$

ie $3+1+C_2=0$

Donc $C_2=-4$ et $K(x)=\frac{x^3}{9}+\frac{3}{x}-4$

et $L(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C_3$ et $L(2)=\frac{1}{2}$

ie $\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+C_3=\frac{1}{2}$

$2+C_3=0$, $C_3=-2$

Donc $L(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}-2$.

Ex 96 p 204.

1) $f(x)=17280e^{-0,024x}$

Pour $x=11$: $f(11)=17280e^{-0,024\times 11}$
≈ 13271.

D'après ce modèle, le nbre de barils de pétrole à découvrir en 2011 est 13271 billions de barils.

2) $f'(x)=17280\times(-0,024)e^{-0,024x}$
$=-414,72\ e^{-0,024x}$

Or $e^{-0,024x}>0$ pour tout réel x

donc $f'(x)<0$ sur $[11;+\infty[$

et f est décroissante sur $[11;+\infty[$.

x	11 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$
variations de f	$\approx 13271 \searrow 0$

3) On cherche à résoudre $f(x)=15000$.

Or, d'après la question précédente, $f(x)\leqslant 13271$ pour tout $x\geqslant 11$.
Donc l'équation n'a pas de solution.

4) On doit résoudre $f(x)\geqslant 6000$.

Or f est continue, strictement décroissante et $6000\in]0;13271]$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'éq° $f(x)=6000$ a une solution unique.

A partir de cette valeur on aura $f(x)<6000$.

Donc il n'est pas possible que au moins 6000 billions de barils soient découverts chaque année.

Déterminons l'année à partir de laquelle $f(x) < 6000$:

On a $f(x) = 6000$ pour

$$17\,280 e^{-0{,}024x} = 6000$$

i.e. $$e^{-0{,}024x} = \frac{6000}{17280}$$

$$-0{,}024x = \ln \frac{6000}{17280}$$

$$x = \frac{1}{-0{,}024} \ln\left(\frac{6000}{17280}\right)$$

$$\underline{x \simeq 44{,}07}.$$

Donc à partir de la 45e année, en 2045, on découvrira moins de 6000 billions de barils par an.

5) a) $F(x) = -\frac{17280}{0{,}024} e^{-0{,}024x}$

$$\underline{= -720\,000\, e^{-0{,}024x}}$$

b) $I = \int_{11}^{21} f(x)\,dx$

$$= \left[-720000\, e^{-0{,}024x}\right]_{11}^{21}$$

$$= -720\,000\left(e^{-0{,}024\times 21} - e^{-0{,}024\times 11}\right)$$

$$\simeq \underline{117\,982}.$$

c) La valeur moyenne de f sur $[11;21]$ est

$$\frac{1}{10}\int_{11}^{21} f(x)\,dx$$

$$\simeq 11\,798$$

On peut espérer découvrir en moyenne <u>11798 billions</u> de barils par an entre 2011 et 2021.