Exercices entraînement intégrales

1) QCM :
   A) Comme h est une fonction positive, l'intégrale de h pour x entre 0 et 5 correspond à l'aire sous la courbe de h, pour x entre 0 et 5 et au-dessus de l'axe des abscisses. En comptant les carreaux sous la courbe de h pour x entre 0 et 5 et au dessus de l'axe des abscisses, on trouve que l'intégrale de 0 à 5 de h(x)dx est comprise entre 20 et 25 unités d'aire. Donc réponse b.
   B) $h(x) = e^{3x+2}$ alors $H(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2}$ car $H'(x) = \frac{1}{3} \times 3e^{3x+2} = h(x)$ réponse b.
2) Graphiquement, f est une fonction positive donc l'intégrale de f pour x entre 1 et 3 correspond à l'aire sous la courbe de f pour x entre 1 et 3 et au-dessus de l'axe des abscisses. On compte entre 8 et 9 carreaux d'1 unité d'aire donc réponse c.
3) Vrai car g est une fonction positive donc l'intégrale de 0 à 1 de g est égale à l'aire sous la courbe de g pour x entre 0 et 1 et au-dessus de l'axe des abscisses. On compte moins de 3 carreaux d'une unité d'aire.
4) Réponse d. car f est positive sur [8 ;12] donc toutes ses primitives sont croissantes sur [8 ;12] (puisqu'elles ont une dérivée : f, positive sur cet intervalle).
5) A) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$ par

$$f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10.$$

   a) $F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 lnx$ est bien une primitive de f car

$$F\,'(x) = 10 + 15x^2 - 6\left(3x^2 lnx + x^3 \times \frac{1}{x}\right) = 10 + 15x^2 - 18x^2 lnx - 6x^2$$
$$= 9x^2(1 - 2\ln x) + 10 = f(x)$$

   b) $\int_1^{1,5} f(x)dx = [F(x)]_1^{1,5} = F(1,5) - F(1)$
   $= (10 \times 1,5 + 5 \times 1,5^3 - 6 \times 1,5^3 \times ln1,5) - (10 \times 1 + 5 \times 1^3 - 6 \times 1^3 \times ln1)$
   $= 16,875 - 20,25ln1,5 \approx 8,66$
   C) La valeur moyenne de l'action sur les six derniers mois en euros est donnée par :
   $\frac{1}{1,5-1}\int_1^{1,5} f(x)dx = \frac{1}{0,5}\int_1^{1,5} f(x)dx \approx 17,32$€ donc faux

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5\ ;\ 6]$. Les points A(1; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).

6) Graphiquement, l'aire sous la courbe de la fonction f pour x entre 1 et 2 et au-dessus de l'axe des abscisses, est entre 3 et 4 unités d'aire.

a) F définie par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$ est bien une primitive de f car
   $F\,'(x) = -2x + 2 + 3\left(ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = -2x + 2 + 3\ln(x) + 3 = -2x + 5 + 3\ln(x) = f(x)$

b) Comme f est positive sur [1 ;2], m'aire exacte en unité d'aire sous la courbe de f pour x entre 1 et 2 et au-dessus de l'axe des abscisses est égale à $\int_1^2 f(x)dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = (-2^2 + 2 \times 2 + 3 \times 2\ln(2)) - (-1^2 + 2 \times 1 + 3 \times 1\ln(1)) = 6\ln(2) - 1 \approx 3,2$

7) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [3 ; 13] par :

$$f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}.$$

$$\int_3^{13} f(x)dx = \left[-x^2 + 20x - \frac{e^{-2x+10}}{-2}\right]_3^{13} = \left[-x^2 + 20x + \frac{e^{-2x+10}}{2}\right]_3^{13}$$
$$= \left(-13^2 + 20 \times 13 + \frac{e^{-2\times 13+10}}{2}\right) - \left(-3^2 + 20 \times 3 + \frac{e^{-2\times 3+10}}{2}\right)$$
$$= 91 + \frac{e^{-16}}{2} - 14 - \frac{e^4}{2} = 77 + \frac{e^{-16} - e^4}{2} \approx 49{,}701$$

Le bénéfice mensuel moyen pour une production entre 3 et 13 centaines de toboggans est donné par : $\frac{1}{13-3} \times \int_3^{13} f(x)dx = \frac{1}{10}\int_3^{13} f(x)dx \approx 4{,}971$ milliers d'€ donc 4 971€

8) Réponse b. car la fonction f est positive donc l'intégrale de 0 à 2 de f correspond à l'aire sous la courbe de f pour x entre 0 et 2 et au-dessus de l'axe des abscisses, soit graphiquement entre 2 et 3 unités d'aire.
   a) $F(x) = -(x^2 + 4x + 5)e^{-x}$ est une primitive de f, donc
   $f(x) = F'(x) = -(2x + 4)e^{-x} - (x^2 + 4x + 5) \times (-1)e^{-x}$
   $= (-2x - 4 + x^2 + 4x + 5)e^{-x} = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x + 1)^{2e^{-x}} \geq 0$ pour tout x donc l'aire du domaine sous la courbe de f, pour x entre 0 et 2 et au-dessus de l'axe des abscisses est donné par $\int_0^2 f(x)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$
   $= -(2^2 + 4 \times 2 + 5)e^{-2} - (-(0^2 + 4 \times 0 + 5)e^{-0}) = -17e^{-2} + 5 \approx 2{,}7$.

9) Graphiquement, f est positive sur [1 ;4] donc l'intégrale de 1 à 4 de f correspond à l'aire sous la courbe de f pour x entre 1 et 4 et au-dessus de l'axe des abscisses. On compte entre 4 et 5 unités d'aire.
   $F(x) = (-10x - 5)e^{-x}$ est une primitive de f car $F = u \times v$ donc
   $F'(x) = -10e^{-x} + (-10x - 5) \times (-1)e^{-x} = e^{-x}(-10 + 10x + 5) = e^{-x}(10x - 5) = f(x)$

On a donc : $\int_2^4 f(x)dx = [F(x)]_2^4 = F(4) - F(2) = (-10 \times 4 - 5)e^{-4} - (-10 \times 2 - 5)e^{-2} = -45e^{-4} + 25e^{-2} \approx 2{,}56$

Le rectangle ABCD est de largeur 2 donc pour que son aire soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure, soit $\int_2^4 f(x)dx = -45e^{-4} + 25e^{-2}$ il faut que $AD = \frac{-45e^{-4}+25e^{-2}}{2} \approx 1{,}28$.

10) On définit une fonction g sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 5]$ par

$$g(x) = 5x - 3x\ln x.$$

$G(x) = -\frac{3}{2}x^2 lnx + \frac{13}{4}x^2$ est bien une primitive de g car : $G\,'(x) = -\frac{3}{2} \times \left(2xlnx + x^2 \times \frac{1}{x}\right) + \frac{13}{4} \times 2x = -\frac{3}{2} \times (2xlnx + x) + \frac{13}{2}x = -3xlnx - \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}x = -3xlnx + \frac{10}{2}x = -3xln(x) + 5x = g(x)$

On a alors la valeur moyenne de g sur [0,5 ;5] :

$$\frac{1}{5-0,5} \times \int_{0,5}^{5} g(x)dx = \frac{1}{4,5}[G(x)]_{0,5}^{5} = \frac{1}{4,5} \times \left(G(5) - G(0,5)\right)$$

$$= \frac{1}{4,5} \times \left(-\frac{3}{2} \times 5^2 ln5 + \frac{13}{4} \times 5^2 - \left(-\frac{3}{2} \times 0,5^2 ln0,5 + \frac{13}{4} \times 0,5^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4,5} \times \left(-\frac{75}{2}ln5 + \frac{325}{4} + \frac{0,75}{2}ln0,5 - \frac{3,25}{4}\right) = \frac{1}{4,5} \times \left(-\frac{75}{2}ln5 + \frac{321,75}{4} + \frac{0,75}{2}ln0,5\right) \approx 4,405$$

11) 1. L'aire du rectangle ABCD est longueur x largeur avec AB=2 ici et $BC = f(2) = 4e^{-0,4\times2} = 4e^{-0,8}$ donc $Aire(ABCD) \approx 8e^{-0,8} \approx 3,6m^2$.

2. Si B est d'abscisse x quelconque entre 0 et 10, l'aire du rectangle ABCD est :

$A(x) = x \times f(x) = x \times 4e^{-0,4x}$.

Etudions cette fonction pour trouver son maximum :

$A'(x) = 1 \times 4e^{-0,4x} + x \times 4 \times (-0,4)e^{-0,4x} = (4 - 1,6x)e^{-0,4x}$ qui est du signe de $4 - 1,6x$ car $e^{-0,4x} > 0$.

Or $4 - 1,6x \geq 0$ équivaut à $4 \geq 1,6x$ soit à $\frac{4}{1,6} \geq x$ soit $x \leq 2,5$.

Ainsi, on le tableau de variation de A :

x	$-\infty$		$2,5$		$+\infty$
$A'(x)$		$+$		$-$	
$A(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(2,5) = 4e^{-0,4\times2,5} = 4e^{-1} \approx 1,47m$

$A(2,5) = 2,5 \times 4e^{-0,4\times2,5} = 10e^{-1} = \frac{10}{e} \approx 3,68.$

Ainsi les dimensions optimales du panneau publicitaire sont de 250cm par 147 cm.