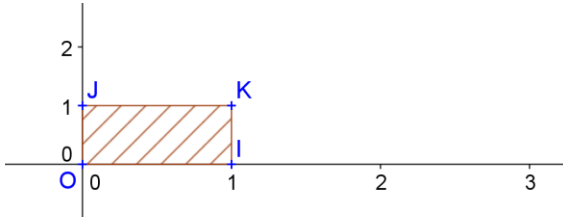
TL Chapitre 5 : Intégration

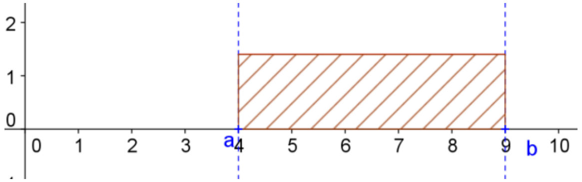
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal, non nécessairement normé. On appelle unité d'aire (u.a.) l'unité du rectangle $OIKJ$.



1- Notion d'intégrale :

1.1. Fonction constante :

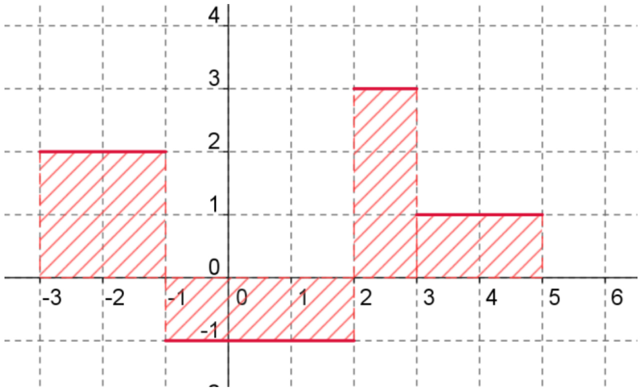
Soit f une fonction définie sur $]a;b[$ par $f(x)=c$, $c>0$. On appelle **intégrale de f sur $[a;b]$** l'aire du rectangle défini par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et qui vaut $c(b-a)$, en unités d'aire.



Lorsque $c<0$, par convention, l'intégrale de f sur $]a;b[$ et l'opposée de l'aire ci-dessus : $c(b-a)$, il s'agit donc d'une aire algébrique, négative en ce cas.

1.2. Fonction en escalier :

Dans le cas d'une fonction en escalier, l'intégrale de f sur $]a;b[$ est la somme algébrique des aires des rectangles colorés, ces aires étant comptées positivement si elles sont au-dessus de l'axe (Ox), négativement sinon, et toujours en **unités d'aire.**

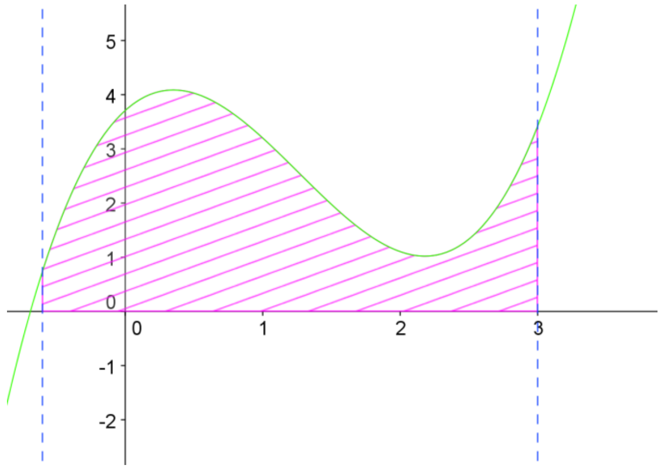


On la note : (notation dûe à Leibniz, au XVIIème siècle)

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(u)du \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)dt$$

1.3. Fonction continue positive :

Définition : l'intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$, est l'aire exprimée en unités d'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. On parle également **d'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$**.



Rqe : $\int_a^a f(x)dx = 0$, car l'aire est alors réduite à un segment.

2- Premières propriétés :

2.1. Extension de la définition :

Dans le cas d'une fonction continue positive et si $a \geq b$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2.2. Relation de Chasles :

Théorème : f est une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels a, b, c dans I, on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

2.3. Linéarité :

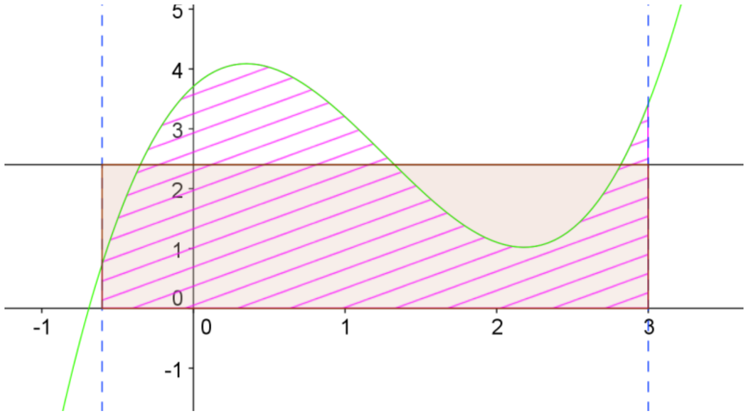
f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, λ un réel. Quels que soient les réels a et b dans I on a :

$$\int_a^b \big(f(x) + \lambda g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$$

2.4. Valeur moyenne :

f est une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels distincts a, b dans I, **la valeur moyenne de f sur $[a; b]$** est :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$



Il s'agit de la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a; b]$.

Théorème : f est une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels distincts a, b dans I, il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$$

2.5. Signe de l'intégrale, encadrement :

Si pour tout réel x de $[a; b]$ on a $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

Ex : 1 à 14 p 189

3- Primitives :

3.1. Définition :

f est une fonction continue sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Théorème : f est une fonction définie sur un intervalle I. Si F et G sont des primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que pour tout x de I :
$F(x) = G(x) + k$.

Corollaire : Un couple de réel $(x_0; y_0)$ étant donné, il existe une unique primitive de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Ex : 17 à 26 p 191

3.2. Primitives d'une fonction continue :

Théorème : f est une fonction **continue** définie sur un intervalle I, a un réel de I. Alors la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est **l'unique primitive de f qui s'annule en a.**

4- Calcul de primitives :

4.1. Fonctions usuelles :

Fonction f	Primitive F	Sur l'intervalle $I = \cdots$
$a\ (constante)$	ax	$\mathbb{R}$
$x^n\ \ (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ $si\ n \geq 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ $si\ n \leq -1$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

4.2. Formules générales :

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent immédiatement aux résultats suivants :

- Si F et G sont resp. des primitives sur un intervalle I des fonctions f et g, alors $F + G$est une primitive sur I de $f + g$.
- Si F est une primitive sur un intervalle I de $f$et λ un réel, alors λF est une primitive sur I de λf.
- Attention, comme pour les formules de dérivées, on ne peut pas juste intégrer un produit ou un quotient « en colonne » !

Fonction f	Primitive F	Remarques
$u'u^n\ \ (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Pour $n < -1$, seulement si u ne s'annule pas sur I.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0\ sur\ I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$	$u > 0\ sur\ I$ $u < 0\ sur\ I$
$u'e^u$	e^u	

Ex : 28 à 36 p 192

5- Calcul d'intégrales :

Théorème : f est une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux réels de I. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), souvent\ noté\ [F(x)]_a^b$$

Exemple : Une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \frac{x^3}{3}$, donc :

$$\int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$$

Ex : 46 à fin p 189