TL _ DS Intégrales _ 27/03/18.

Exercices :

① L'unité d'aire (u.a.) est de 1 carreau. On en déduit que :

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 3\,u.a$ 0,5

$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \simeq 6\,u.a$ (plutôt 5,7ua)

② (a) $\int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (-x^2+3 - (x^2+1))dx$

$= \int_{-1}^{1} (-x^2+3-x^2-1)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} -2x^2+2\,dx$

$= \left[-\frac{2x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1}$ 2

$= (-\frac{2}{3}+2) - (\frac{2}{3}-2)$

$= -\frac{4}{3}+4 = \frac{8}{3}$.

(b) $\int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Il s'agit de l'aire comprise entre $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ et les droites $x=-1$ et $x=1$, 1

car sur $[-1;1]$ on a $g(x) \geq f(x)$.

(c) Une approximation de cette aire est donc, d'après (1), $5{,}7 - 3 = 2{,}7$ unités d'aire. Ce qui est cohérent avec la valeur $\frac{8}{3}$. 0,5

Exercice 2 = 4x2

① ⓐ Car $F'(x) = \frac{1}{4}\times 4x^3 - \frac{1}{4}\times 2x + \frac{7}{3}$

$= x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{3} = f(x)$

② ⓐ Car $F'(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right)' = -3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{3}{x^2} = f(x)$.

③ ⓑ Car $F'(x) = 3(-6e^{-6x}) = -18e^{-6x}$

$= f(x)$

④ ⓐ Car $F(2) = \frac{8}{3} + \frac{3}{2}\times 4 - 2 - \frac{22}{6} = \frac{16}{6} + \frac{36}{6} - \frac{12}{6} - \frac{22}{6}$

$= \frac{18}{6} = 3$ et $F'(x) = x^2+3x-1 = f(x)$.

Exercice 3 =

① $A = \int_{1}^{2} 2x - 5\,dx = \left[x^2 - 5x\right]_{1}^{2}$

2

$= (4-10) - (1-5)$

$= -6 + 4$

$= -2$

$B = \int_{-2}^{0} 4x^2\,dx = \left[\frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{4}{3}\times(-8)\right)$

2

$= \frac{32}{3}$.

$C = \int_{-1}^{3} x\,(x^2+1)^8\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^9}{9}\right]_{-1}^{3}$

Bonus

$= \frac{10^9}{18} - 0 = \frac{10^9}{18}$.

② (a) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} = -e^{-1} + e^{1}$

2

$= e - \frac{1}{e}$.

(b) $\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

1

③ $I = \int_{0}^{5} -3g(t) + 5f(t)\,dt$

$= -3\int_{0}^{5} g(t)\,dt + 5\int_{0}^{5} f(t)\,dt$

$= -3\times 8 + 5\times(-6)$

$= -24 - 30$

$= -54$ par linéarité de l'intégrale.

1