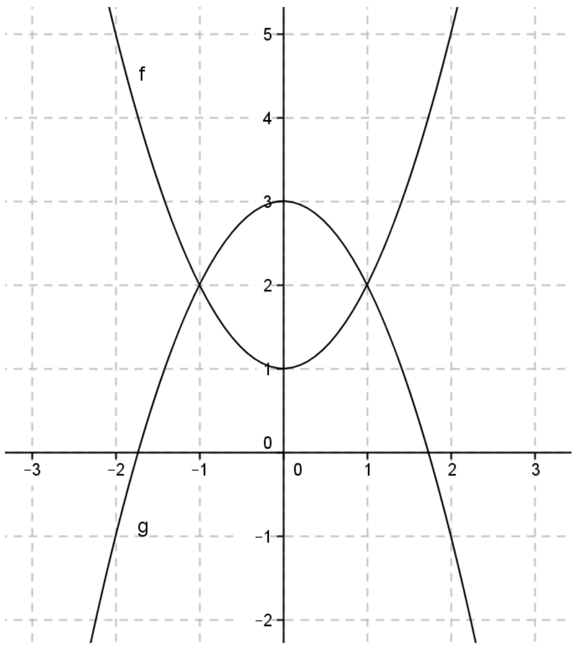
TL 27 mars 2018

DS Intégrales

Exercice 1 : (4 points) Soient f et g deux fonctions continues positives sur [-2 ;2] dont les courbes sont représentées ci-contre.



1. Estimer, à l'aide du graphique, $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ et $\int_{-1}^{1} g(x)dx$.

2. On sait maintenant que $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 3$.

(a) Calculer $\int_{-1}^{1} g(x) - f(x)dx$.

(b) Quelle est l'aire correspondante sur le graphique ? Justifier.

(c) Retrouver ce résultat à l'aide de l'estimation faite à la question 1.

Exercice 2 : (8 points) En justifiant, choisissez la bonne réponse :

1. Une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}$ est :

a. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{1}{4}$ b. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{7}{3}x$

c. $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}$

2. Une primitive de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x^2}$ est :

a. $F(x) = -\frac{3}{x} - 1$ b. $F(x) = \frac{3}{x^2}$ c. $F(x) = \frac{-6}{x^2}$

3. Une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -18e^{-6x}$ est :

a. $F(x) = 108\, e^{-6x}$ b. $F(x) = 3(e^{-6x} + 1)$ c. $F(x) = e^{-6x}$

4. La primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ qui a pour valeur 3 pour $x = 2$ est :

a. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{22}{6}$ b. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{22}{6}$

c. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + 3$

Exercice 3 : (8 points)

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{1}^{2} 2x - 5dx \qquad B = \int_{-2}^{0} 4x^2dx \qquad C = \int_{-1}^{3} x(x^2+1)^8dx$$

2. (a) Montrer que $\int_{-1}^{1} e^{-x}dx = e - \frac{1}{e}$

(b) En déduire la valeur moyenne de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ sur [-1 ;1]

3. Sachant que f et g sont deux fonctions continues sur [0 ; 5] telles que $\int_{0}^{5} f(t)dt = -6$ et $\int_{0}^{5} g(t)dt = 8$, calculer $I = \int_{0}^{5} -3g(t) + 5f(t)dt$. Justifier.