Exercice 1 : (6 points) *Les questions sont indépendantes.*

1. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 - \frac{1}{2n+1}$. Cette suite est-elle géométrique ? Justifier.

2. Soit w la suite définie par $w_0 = -2$ et pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = -w_n^2 + 1$. Calculer w_3.

3. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2 \times 3^{n+1}$.

(a) Montrer que cette suite est géométrique. Donner sa raison.

(b) Déterminer les variations de la suite v en justifiant.

Exercice 2 : (3 points) : On considère la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(a) Exprimer S_n en fonction de n.

(b) Déterminer la limite de S quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : (11 points) Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n - 1$

1- Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

2- On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + \frac{3}{2}$.

(a) Montrer que $v_{n+1} = \frac{1}{3}\, v_n$.

(b) En déduire la nature que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et préciser son premier terme.

(c) Exprimer alors v_n en fonction de n.

(d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

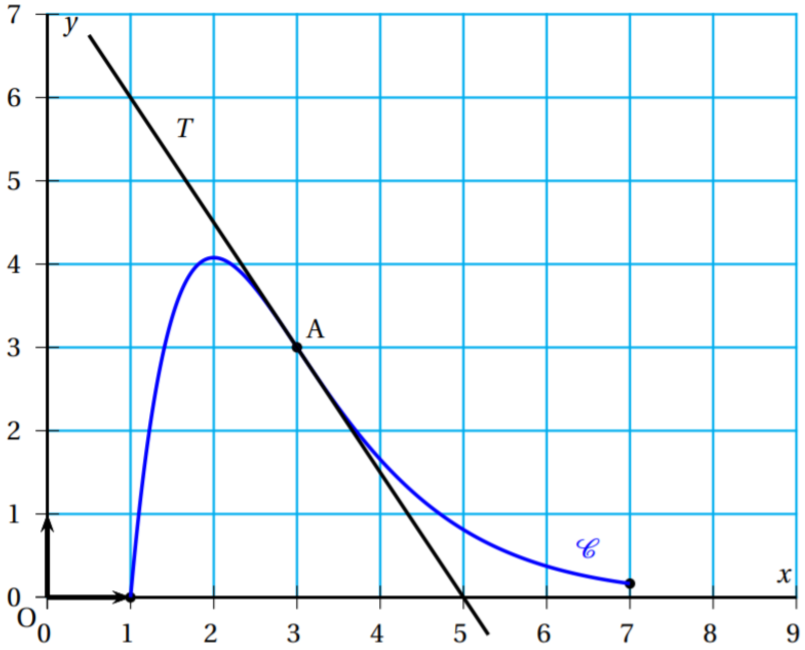
(e) Quelle est la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$? En déduire la limite de (u_n).

TL NOM : ……………………………………………………………… Février 2018

DS 2^nde chance - Exponentielle

Exercice 1 : (6 points) Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées une seule réponse est exacte. Choisir la réponse correcte sans justifier.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1;7]$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A(3; 3) et passe par le point de coordonnées (5; 0).
Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f :

a. $f'(3) = 3$ **b.** $f'(3) = \frac{3}{2}$ **c.** $f'(3) = -\frac{2}{3}$ **d.** $f'(3) = -\frac{3}{2}$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f :

a. $f''(3) = 3$ **b.** $f''(3) = 0$ **c.** $f''(5) = 0$ **d.** $f''(2) = 0$

3. On note F une fonction dont la dérivée est f. F est nécessairement :

a. croissante sur $[1;7]$ **b.** décroissante sur $[2;7]$ **c.** négative sur $[2;7]$ **d.** positive sur $[1;7]$

4. La fonction f est convexe sur l'intervalle :

a. $[1\,;5]$ **b.** $[1\,;2]$ **c.** $[1\,;3]$ **d.** $[3\,;7]$

Exercice 2 : (14 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longrightarrow x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f
   a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
   b. En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum?
2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
   a. Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.
   b. Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
   c. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.
4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.*

Correction :

Suites :

Exercice 1 : (6 points) *Les questions sont indépendantes.*

1. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 - \frac{1}{2n+1}$. Cette suite est-elle géométrique ? Justifier.

$u_0 = 2, u_1 = \frac{8}{3}, u_2 = \frac{14}{5}$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$; ce n'est donc pas une suite géométrique

2. Soit w la suite définie par $w_0 = -2$ et pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = -w_n^2 + 1$. Calculer w_3.

$$w_0 = -2, w_1 = -w_0^2 + 1 = -4 + 1 = -3, w_2 = -8, w_3 = -63$$

3. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2 \times 3^{n+1}$.

(a) Montrer que cette suite est géométrique. Donner sa raison.

$$v_{n+1} = -2 \times 3^{n+1+1} = -2 \times 3^{n+2}$$

Les termes de cette suite étant non nuls, on détermine $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2\times 3^{n+2}}{-2\times 3^{n+1}} = 3^{n+2-(n+1)} = 3$ qui est une constante. Donc v est une suite géométrique de raison 3.

(b) Déterminer les variations de la suite v en justifiant.

La raison de v est supérieure à 1, mais $v_0 = -6$ donc v est strictement décroissante.

Exercice 2 : (3 points) : $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(a) Exprimer S_n en fonction de n.

On sait que $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec ici $q = \frac{1}{2}$ donc $S = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

(b) Déterminer la limite de S quand n tend vers $+\infty$.

La limite de q^n quand $0 < q < 1$ est 0.

Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim_{n\mapsto+\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$

Exercice 3 : (11 points) Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n - 1$

1- Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

$$u_1 = \frac{1}{3}\, u_0 - 1 = 0$$

$$u_2 = -1, u_3 = -\frac{4}{3}$$

2- On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + \frac{3}{2}$.

(a) Montrer que $v_{n+1} = \frac{1}{3}\, v_n$.

On utilise le fait que $u_n = v_n - \frac{3}{2}$

On a $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{2} = \frac{1}{3} u_n - 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(v_n - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\, v_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\, v_n$

(b) En déduire la nature que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et préciser son premier terme.

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ avec $v_0 = u_0 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

(c) Exprimer alors v_n en fonction de n.

On a donc $v_n = v_0 \times q^n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Alors $u_n = v_n - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$

(e) Quelle est la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$? En déduire la limite de (u_n).

La raison de v étant $\frac{1}{3}$, v est convergente et sa limite est 0. Alors $u_n = v_n - \frac{3}{2}$ donc u est convergente et sa limite est $-\frac{3}{2}$.

Exponentielle

Exercice 1 :

1. d. Coefficient directeur de la tangente en A. Compter les carreaux ! $f'(3) = \frac{différence\ verticale}{différence\ horizontale}$
2. b. A d'abscisse 3 est l'unique point d'inflexion de la courbe donc $f''(3) = 0$.
3. a. On a $F' = f$ et f est positive sur $[1; 7]$ (sa courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses)
4. d. f est convexe à partir de son point d'inflexion

Exercice 2 :

Partie A :

1. Étude des variations de la fonction f

   a. D'après le logiciel de calcul formel, $f'(x) = -e^{-x+1} + 1$ et $f'(x) > 0 \iff x > 1$.
   $f(1) = 1 + e^0 = 2$
   $f(0) = 0 + e^1 = e$ et $f(10) = 10 + e^{-9} \approx 10,00$
   D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\searrow$	2	$\nearrow$	$10 + e^{-9}$

   b. La fonction f admet donc sur $[0 ; 10]$ un minimum $f(1) = 2$.

2. D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = e^{-x+1}$.
   Or, pour tout x, $e^{-x+1} > 0$ donc la fonction f' est croissante et donc la fonction f est convexe sur $[0 ; 10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.
Comme le nombre d'objets est limité à 1 000 et que x désigne le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines, on peut dire que $x \in [0; 10]$.

1. La fonction f représente le coût de revient exprimé en milliers d'euros; ce coût est minimum lorsque la fonction f atteint son minimum, c'est-à-dire pour $x = 1$.
   Pour que le coût de revient soit minimum, il faut donc produire 100 objets.
2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

   a. La vente de 100 objets rapporte 100×12 € soit 1,2 millier d'euros donc la vente de x centaines d'objets rapporte $1,2x$ milliers d'euros.

b. La marge brute $g(x)$ est la différence entre le prix de vente et le coût de production donc :
$g(x) = 1,2x - \left(x + \mathrm{e}^{-x+1}\right) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$

c. Sur $[0\,;10]$, $g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x+1}$. Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;10]$ et la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

3. a. La fonction g est dérivable donc continue, et strictement croissante sur $[0\,;10]$.
$g(0) = -\mathrm{e} < 0$ et $g(10) = 0,2 \times 10 - \mathrm{e}^{-9} \approx 2 > 0$

D'où le tableau de variations de la fonction g :

x	0	α	10
$g(x)$	$-\mathrm{e}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$2-\mathrm{e}^{-9}$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;10]$.

b. $\left.\begin{array}{l} g(1) = -0,8 < 0 \\ g(2) \approx 0,03 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1\,;2]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} g(1,9) \approx -0,027 < 0 \\ g(2,0) \approx 0,03 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,9\,;2]$

$\left.\begin{array}{l} g(1,94) \approx -0,0026 < 0 \\ g(1,95) \approx 0,003 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,94\,;1,95]$

4. Pour réaliser une marge brute positive, il faut produire x centaines d'objets de façon que $g(x) > 0$; donc il faut que $x > \alpha$.

On sait que $\alpha \in [1,94\,;1,95]$ et que x représente des centaines d'objets.

La quantité minimale d'objets à produire pour que cette entreprise réalise une marge brute positive est donc de 195.