TL NOM : ………………………………………………………………… 05/02/2018

DS Exponentielle

Exercice 1 : (6 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées une seule réponse est exacte. Choisir la réponse correcte sans justifier.

1. f est une fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-2x+1}$. On note f' sa dérivée.

(a) $f'(x) = e^{-2}$ **(b)** $f'(x) = e^{-2x+1}$ **(c)** $f'(x) = -2e^{-2x+1}$

2. On donne le tableau de variations d'une fonction g définie et continue sur $[-5; 12]$.

x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	$\searrow$	-8	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

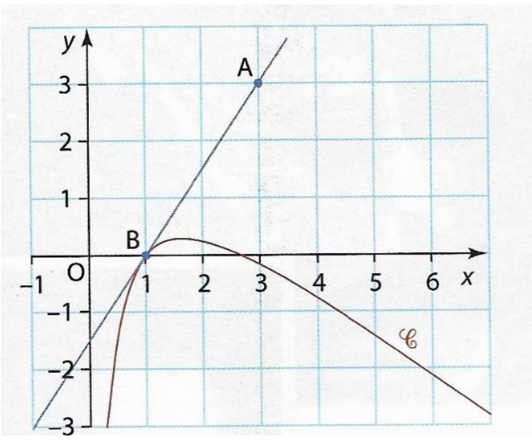
(a) L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-5; 12]$.
(b) Pour tout x dans l'intervalle $[-5; 12]$, $g(x) < 0$
(c) Sur $[2; 12]$, g est concave

3. La courbe donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.La droite (AB) est la tangente à la courbe au point B d'abscisse 1.

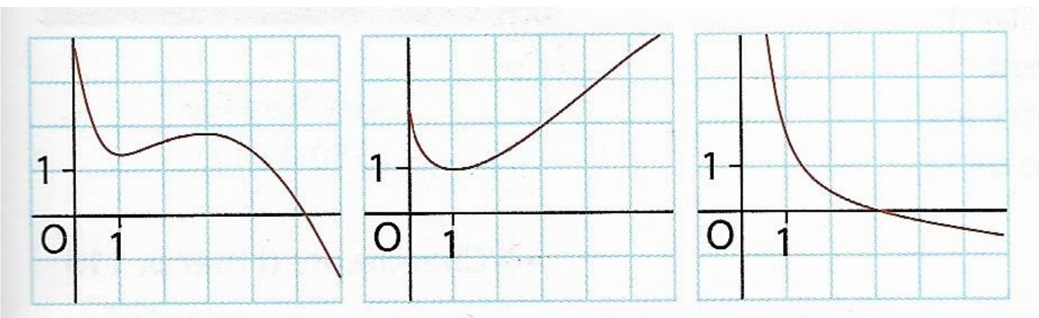
(a) $h'(1) = 0$

(b) $h'(1) = 1{,}5$

(c) $h'(1) = -\frac{2}{3}$



4. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction H dont la dérivée est h. Préciser laquelle.



Exercice 2 : **(14 points)**

Partie A : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$.

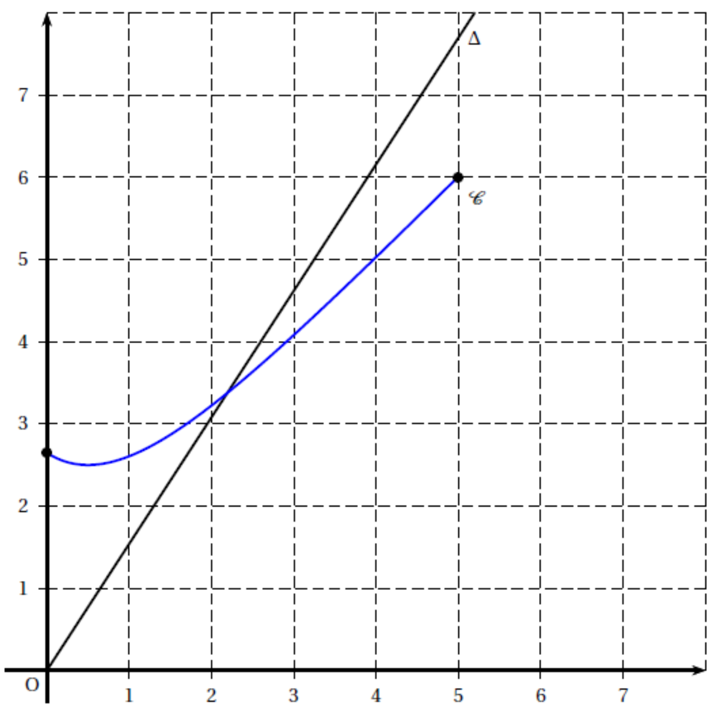
On a représenté en annexe, dans un plan muni d'un repère orthonormé :
— la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;
— la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1. **a.** Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.
2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.
   a. Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
   b. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0\,;5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

Partie B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à raide d'une machine.
La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. **a.** Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
   b. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €.
   La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par
   $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2. **a.** Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   b. Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
   Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.



Eléments de correction :

Ex 1 : c, a, b, a

Ex 2 :

PARTIE 1 : Lecture graphique

1. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2$ sur [3; 9] sont les abscisses (les x de l'intervalle [3; 9]) des points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2. **Donc pour $x \in [4; 9]$, on écrit S= [4; 9].**

2 f'(3) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 3

La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(3) = 0$

$f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe au point B d'abscisse 4 donc $f'(4) = \frac{-2}{2} = -1$

. **D'où $f'(4) = -1$**

3. f est croissante sur [2 ;3] et décroissante sur [3 ; 9] d'où le tableau de signe :

x	2	3	9
signe $f'(x)$	+	0	-

4. f semble concave sur [2 ; 4] et convexe sur [4 ; 9]. En effet C_f traverse la tangente en B (pour x= 4).

PARTIE 2 : Etude de la fonction définie sur l'intervalle [2; 9] par $f(x) = (x-2)\, e^{(-x+4)}$

1. a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle [2; 9], calcul de $f'(x)$:

f de la forme $u \times v$ On pose $u(x) = x - 2$ et $v(x) = e^{(-x+4)}$ ←de la forme e^w et $(e^w)' = w'e^w$

On obtient $u'(x) = 1$ et $v'(x) = (-x+4)'\, e^{(-x+4)} = -e^{(-x+4)}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (1)(e^{(-x+4)}) + (x-2)(-e^{(-x+4)}) = e^{(-x+4)}(1 - x + 2) = (-x+3)\, e^{(-x+4)}$

D'où $f'(x) = (-x+3)\, e^{(-x+4)}$

b) **Sur l'intervalle [2; 9] on étudie le signe de $f'(x)$ et on déduit le tableau de variations de la fonction f.**

Pour tout réel x, $e^{(-x+4)} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - x$ or $3 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$ ← *changement de sens de l'inégalité*

On a donc

x	2		3		9
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
variation de f	*f(2)*	↗	*f(3)*	↘	*f(9)*

Attention le tableau doit être complet !

Avec $f(2) = (2-2)\, e^{(-2+4)} = 0$ $f(3) = e$ (point A de l'énoncé)

et $f(9) = (9-2)\, e^{(-9+4)} = 7e^{-5} \approx 0{,}05$

2. f est **continue et strictement croissante** sur [2 ;3] et on a $f(2) = 0$ et $f(3) = e \approx 2{,}7$donc $\boldsymbol{f(2) < 2 < f(3)}$. **D'après le théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation f(x)= 2 admet une solution unique sur [2 ;3]. La table de la calculatrice (*début=2,2 et pas=0,01*) donne $f(2{,}4) \approx 1{,}98$ et $f(2{,}41) \approx 2{,}01$ donc $2{,}4 < \alpha < 2{,}41$ d'où **α arrondi à 2,4.**

3. L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe en B(4 ;2) est de la forme $y = f'(4)\,(x-4) + f(4)$

or $f(4) = (4-2)\, e^{(-4+4)} = 2\, e^0 = 2$ et $f'(4) = (-4+3)\, e^{(-4+4)} = -\, e^0 = -1$ (on retrouve le résultat de la partie 1. 2.)

D'où $y = (-1)(x-4) + 2$ donc $y = -x + 4 + 2$. **Donc l'équation réduite de la tangente (T) est $y = -x + 6$.**

4.a) Calcul de $f''(x)$.

$f'(x) = (-x+3)\, e^{(-x+4)}$ de la forme $u \times v$ On pose $u(x) = -x + 3$ et $v(x) = e^{(-x+4)}$ de la forme e^w et $(e^w)' = w'e^w$

Et on a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = (-x+4)'\, e^{(-x+4)} = -e^{(-x+4)}$

$f''(x) = (-1)(e^{(-x+4)}) + (-x+3)(-e^{(-x+4)})$

$= (-1 + x - 3)\, e^{(-x+4)}$

$= (x-4)\, e^{(-x+4)}$ Donc **$f''(x) = (x-4)\, e^{(-x+4)}$**

b) Recherche **des coordonnées du point d'inflexion de (C) : on étudie le signe de $f''(x)$**

Pour tout réel $x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(x-4)$ car Exp est toujours positive. Or $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

x	2		4		9
Signe de $f''(x)$		-	0	+	

$f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = 4$. Donc **la courbe admet un point d'inflexion au point B d'abscisse 4 et d'ordonnée $f(4) = (4-2)\, e^{(-4+4)} = 2\, e^0 = 2$.**

PARTIE 3 : Etude d'un bénéfice

1. Calcul du bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres :

   400 litres = 4 centaines de litres $f(4) = (4 - 2)\ e^{(-4+4)} = 2\ e^0 = 2$.

   Pour 400 litres, le bénéfice est de 2 milliers d'euros soit 2000 euros.

2. Recherche de la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal :

   Le bénéfice est maximum pour x = x_A = 3 soit pour 300 litres.

   $f(3) = e \approx 2,7182$ soit environ $2,7182 \times 1000 = 2718,2$ euros de bénéfice.

   Le bénéfice est maximum pour 300 litres et est environ de 2718 euros

3. **La baisse des bénéfices se trouve ralentie à partir d'une production de 400 litres**, ceci correspond à l'abscisse du point d'inflexion B de la courbe.