TL **DM4 – SUITES – PROBABILITES CONDITIONNELLES**

**Rédiger au moins l'un des deux exercices suivants pour avoir le bonus.**

## EXERCICE 1 : SUITES

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ». Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel $n$ strictement positif, on note $a_n$ la probabilité que Claudine demande un avis la $n$-ième semaine. On a ainsi $a_1 = 0,1$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel $n$ strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

1. Calculer la probabilité $a_2$ que Claudine demande un avis la deuxième semaine.
2. Pour tout nombre entier naturel $n$ strictement positif, on définit la suite $(v_n)$ par :

$$v_n = a_n - 0,8.$$

   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,5$.
   Préciser son premier terme $v_1$.

   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$ strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

   (d) En déduire la limite de la suite $(a_n)$. Interpréter ce résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| VARIABLES : | $A$ est un réel<br>$N$ est un entier naturel<br>$L$ est un réel strictement compris entre $0,1$ et $0,8$ |
| INITIALISATION : | $A$ prend la valeur $0,1$<br>$N$ prend la valeur 1 |
| TRAITEMENT : | Tant que $A \leqslant L$<br>  $N$ prend la valeur $N+1$<br>  $A$ prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$<br>Fin du Tant que |
| SORTIE : | Afficher $N$ |

   (a) Pour la valeur $L = 0,7$, recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant :

| Valeur de $N$ | 1 | 2 | … | |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de $A$ | 0,1 | | … | |
| Condition $A \leqslant L$ | vraie | | … | |

   (b) En déduire l'affichage de $N$ obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de $L$ est $0,7$.

   (c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment on peut interpréter le nombre $N$ obtenu en sortie de l'algorithme quand le nombre $L$ est compris strictement entre $0,1$ et $0,8$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

## Exercice 2 : Probabilités conditionnelles

*Les parties A et B sont indépendants.*

Dans un grand collège, 20,3 % des élèves sont inscrits à l'association sportive.
Une enquête a montré que 17,8 % des élèves de ce collège sont fumeurs.
De plus, parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive.

On choisit au hasard un élève de ce collège. On note :

- $S$ l'évènement « l'élève choisi est inscrit à l'association sportive » ;
- $F$ l'évènement « l'élève choisi est fumeur ».

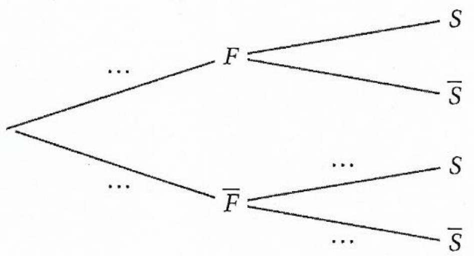
**Rappel des notations :**

Si $A$ et $B$ sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement $A$ et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement $A$ sachant que l'évènement $B$ est réalisé.
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de $A$.

*Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.*

**PARTIE A**

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les valeurs des probabilités $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.




3. Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{F} \cap S$ et interpréter le résultat.
4. On choisit au hasard un élève parmi ceux inscrits à l'association sportive. Calculer la probabilité que cet élève soit non fumeur.
5. On choisit au hasard un élève parmi les élèves fumeurs. Montrer que la probabilité que cet élève soit inscrit à l'association sportive est de 0,101.

**PARTIE B**

Une loterie, à laquelle tous les élèves du collège participent, est organisée pour la journée anniversaire de la création du collège. Quatre lots sont offerts. On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise.
On rappelle que 20,3 % de l'ensemble des élèves sont inscrits à l'association sportive.

En justifiant la démarche, calculer la probabilité que parmi les quatre élèves gagnants, il y ait au moins un qui soit inscrit à l'association sportive.

**Corrigé :**

**Exercice 1 : Amérique du sud Nov 2015**

**1.** $a_2 = 0{,}5a_1 + 0{,}4 = 0{,}5 \times 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}45$
La probabilité que Claudine demande un avis la deuxième semaine est égale à 0,45.

**2.** Pour tout nombre entier naturel $n$ strictement positif, on définit la suite $(v_n)$ par : $v_n = a_n - 0{,}8$.

**a.** Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = a_n - 0{,}8$ donc $a_n = v_n + 0{,}8$.

- $v_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5a_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5(v_n + 0{,}8) - 0{,}4 = 0{,}5v_n + 0{,}4 - 0{,}4 = 0{,}5v_n$
- $v_1 = a_1 - 0{,}8 = 0{,}1 - 0{,}8 = -0{,}7$

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = -0{,}7$.

**b.** La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = -0{,}7$ donc, d'après le cours, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -0{,}7 \times 0{,}5^{n-1}$.
Comme $u_n = v_n + 0{,}8$, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}5^{n-1}$.

**c.** La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}5$ ; or $0 < 0{,}5 < 1$ donc la suite $(v_n)$ est convergente et a pour limite 0.

**d.** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \\ a_n = v_n + 0{,}8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}8$
Cela signifie que, quand le nombre de semaines deviendra très grand, Claudine va demander un avis 8 fois sur 10.

**3.** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| VARIABLES : | $A$ est un réel<br>$N$ est un entier naturel<br>$L$ est un réel strictement compris entre 0,1 et 0,8 |
| INITIALISATION : | $A$ prend la valeur 0,1<br>$N$ prend la valeur 1 |
| TRAITEMENT : | Tant que $A \leqslant L$<br>    $N$ prend la valeur $N + 1$<br>    $A$ prend la valeur $0{,}5 \times A + 0{,}4$<br>Fin du Tant que |
| SORTIE : | Afficher $N$ |

**a.** Pour la valeur $L = 0{,}7$, on complète les colonnes du tableau suivant :

| Valeur de $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de $A$ | 0,1 | 0,45 | 0,625 | 0,7125 |
| Condition $A \leqslant L$ | vraie | vraie | vraie | fausse |

**b.** L'affichage de $N$ obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de $L$ est 0,7 est donc 4.

**c.** Le nombre $N$ obtenu par l'algorithme quand le nombre $L$ est compris entre 0,1 et 0,8 est le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à $L$.

On cherche $n$ tel que $a_n > 0{,}799$ :

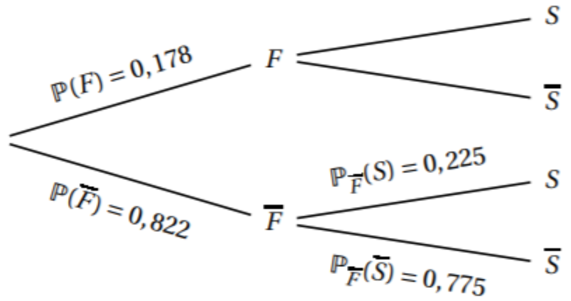
Le corrigé type suggère d'utiliser la fonction logarithme que nous n'avons pas encore vue. On peut aussi faire une recherche « à la main (avec la calculatrice) » ou avec un algo…

On trouve que le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799 est 11.

**Exercice 2 : Amérique du nord, Juin 2015**

**Partie A**

1. D'après les données de l'énoncé, $\mathbb{P}(S) = 0,203$, en effet 20,3% des élèves sont inscrits à l'association sportive.
   De plus, parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive. Ainsi $\mathbb{P}_{\overline{F}}(S) = 0,225$
   Comme : $\mathbb{P}_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{F}}(S) = 0,775$.
2. On en déduit l'arbre de probabilité :




3. $\mathbb{P}\left(\overline{F} \cap S\right) = \mathbb{P}_{\overline{F}}(S) \times \mathbb{P}\left(\overline{F}\right) = 0,225 \times 0,822 = 0,18495 \approx 0,185$.
   18,5 % environ des élèves sont non fumeurs et inscrits dans une association sportive.
4. Ici on calcule : $\mathbb{P}_S\left(\overline{F}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(\overline{F} \cap S\right)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{0,18495}{0,203} \approx 0,911$

5. En utilisant la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\overline{F} \cap S\right) + \mathbb{P}(F \cap S) \iff 0,203 = 0,18495 + \mathbb{P}(F \cap S) \iff \mathbb{P}(F \cap S) = 0,203 - 0,18495 = 0,01805$.
   Or : $\mathbb{P}_F(S) = \dfrac{\mathbb{P}(F \cap S)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{0,01805}{0,178} = 0,10140449 \approx 0,101$.

**Partie B**

Nous sommes dans le cas d'une épreuve de Bernoulli.
Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli (On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise).
Comme $X$ est une variable aléatoire comptant le nombre d'élèves gagnants, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 4$ et $p = 0,203$.
Ici on calcule :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(X \geqslant 1) & = & 1 - \mathbb{P}(X < 1) \\
& = & 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\
& = & 1 - \binom{4}{0} \times 0,203^0 \times (1 - 0,203)^4 \\
& = & 1 - (1 - 0,203)^4 \\
& \approx & 0,597
\end{array}$$