Seconde **AP Trinôme 1 – Equation produit**

Soutien

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $(3x-2)(x+4)=0$

(b) $(-2x-1)(3+5x)=0$

(c) $\left(\frac{3}{2}x+4\right)\left(\frac{2x+1}{5}\right)=0$

(d) $x(x-5)(3x+6)=0$

Exercice 2 : Factorisations faciles

(a) $3x+x^2$

(b) $18x^2-9x$

(c) $7y^2-14y^4$

(d) $(x+1)(4+x)-3(4+x)$

Exercice 3 : Factorisations moins faciles

(a) x^2-4

(b) $9x^4-25$

(c) $81-(7x+2)^2$

(d) $(x-3)^2-(2x+5)^2$

(e) $(x+3)(5x-2)+(4x+5)(2x+6)$

Exercice 4 : Résoudre les équations en utilisant une équation produit nul :

(a) $18x^2-6x=0$

(b) $(3x+8)^2=0$

(c) $5x^2-4x+1=1$

(d) $(3x-2)(4-5x)=-8$

(e) $(6x-4)^2-49=0$

REPONSES :

Ex 1 : (a) $\frac{2}{3}$ et -4 (b) $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{5}$ (c) $-\frac{8}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ (d) 0 ; 5 et -2 **Ex 2 :** (a) $x(3+x)$ (b) $9x(2x-1)$ (c) $7y^2(1-2y^2)$ (d) $(x+1)(4+x)-3(4+x)=(4+x)\big((x+1)-3\big)=(4+x)(x-2)$	**Ex 3 : les 4 premiers sont des formes développées de l'identité remarquable a^2-b^2** (a) $(x-2)(x+2)$ (b) $(3x^2-5)(3x^2+5)$ (c) $\big(9-(7x+2)\big)\big(9+(7x+2)\big)=(9-7x-2)(9+7x+2)=(7-7x)(11+7x)$ (d) $\big((x-3)-(2x+5)\big)\big((x-3)+(2x+5)\big)$ $=(x-3-2x-5)(x-3+2x+5)$ $=(-x-8)(3x+2)$ (e) $(x+3)(5x-2)+(4x+5)(2x+6)$ $=(x+3)(5x-2)+(4x+5)2(x+3)$ $=(x+3)\big((5x-2)+2(4x+5)\big)$ $=(x+3)(13x+8)$

Ex 4 : On factorise chaque équation pour obtenir une équation produit nul :

(a) **$6x(3x-1)=0$ donc $x=0$ ou $x=\frac{1}{3}$**

(b) **$(3x+8)=0$ donc $x=-\frac{8}{3}$**

(c) $5x^2-4x+1=1$ s'écrit $5x^2-4x=0$ ce qui se factorise en $x(5x-4)=0$ et donc $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$

(d) $ATTENTION$: *ce n'est pas un produit nul* ! on écrit $(3x-2)(4-5x)+8=0$ *et comme il n'y a pas de factorisation possible, ici, EXCEPTIONNELLEMENT on développe, car on ne peut rien faire d'autre:* $12x-15x^2-8+10x+8=0$
Donc $22x-15x^2=0$ et là on peut factoriser : $x(22-15x)=0$ d'où soit $x=0$ soit $x=\frac{22}{15}$

(e) $(6x-4)^2-49=0$ TOUJOURS chercher à factoriser en premier : ici c'est une identité remarquable :

$\big((6x-4)-7\big)\big((6x-4)+7\big)=0$ c'est-à-dire $(6x-11)(6x+3)=0$ et donc $x=\frac{11}{6}$ ou $x=-\frac{1}{2}$

Seconde

AP Trinôme 1 – Equation produit

Approfondissement

On pourra méditer la propriété suivante :

$$3 \times (-4) = (-3) \times 4 = -(3 \times 4)$$

qui est triviale sur les entiers mais s'écrit avec des facteurs plus complexes :

$$(x-1)(-3x+5) = (-x+1)(3x-5) = -(x-1)(3x-5) = -(-x+1)(-3x+5)$$

Et au passage, il peut être avisé de remarquer que :

$-x+1$ s'écrit aussi $1-x$

Et oui…

Exercice 1 : Factorisations :

(a) $(3x-5)^2 - (3x-5)$

(b) $(2x-5)^2 - (7x+1)^2$

(c) $-12 + 27x^2$

(d) $(7x+3)(4x-1) - (2x-9)(1-4x)$

(e) $(8x-3)(3x-1) - 9x^2 + 3x$

(f) $16x^2 - 25 - (4x-5)^2 + (x-3)(8x-10)$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $12x^2 - 75 = 0$

(b) $(3x-1)(8x-4) - 2(3x-1) = 0$

(c) $(x-1)(x-4) - 2x + 2 = 0$

(d) $(-4x+2)(5x-3) + (3-5x)(7x+1) = 0$

REPONSES :

Exercice 1 : Factorisations :

(a) $(3x-5)^2 - (3x-5) = (3x-5)\big((3x-5)-1\big) = (3x-5)(3x-6)$

(b) $(2x-5)^2 - (7x+1)^2 = \big((2x-5)-(7x+1)\big)\big((2x-5)+(7x+1)\big) = (-5x-6)(9x-4)$

(c) $-12 + 27x^2 = 3(-4+9x^2) = 3(9x^2-4) = 3(3x-2)(3x+2)$

(d) $(7x+3)(4x-1) - (2x-9)(1-4x) = (7x+3)(4x-1) + (2x-9)(4x-1) = (4x-1)(7x+3+2x-9) = (4x-1)(9x-6)$

(e) $(8x-3)(3x-1) - 9x^2 + 3x = (8x-3)(3x-1) - 3x(3x-1) = (3x-1)\big((8x-3)-3x\big)$
$= (3x-1)(5x-3)$

(f) $16x^2 - 25 - (4x-5)^2 + (x-3)(8x-10) = (4x-5)(4x+5) - (4x-5)^2 + (x-3)2(4x-5)$
$= (4x-5)\big((4x+5)-(4x-5)+2(x-3)\big) = (4x-5)(2x+4)$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $12x^2 - 75 = 0$ s'écrit $3(4x^2-25) = 0$ et donc $3(2x-5)(2x+5) = 0$ d'où $x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$

(b) $(3x-1)(8x-4) - 2(3x-1) = 0$ s'écrit $(3x-1)\big((8x-4)-2\big) = 0$ et donc $(3x-1)(8x-6) = 0$ d'où $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{3}{4}$

(c) $(x-1)(x-4) - 2x + 2 = 0$ s'écrit $(x-1)(x-4) - 2(x-1) = 0$ et donc $(x-1)\big((x-4)-2\big) = 0$ c'est-à-dire $(x-1)(x-6) = 0$ d'où $x = 1$ ou $x = 6$

(d) $(-4x+2)(5x-3) + (3-5x)(7x+1) = 0$ s'écrit $(-4x+2)(5x-3) - (5x-3)(7x+1) = 0$ et donc $(5x-3)\big((-4x+2)-(7x+1)\big) = 0$ d'où $(5x-3)(-11x+1) = 0$ et donc $x = \frac{3}{5}$ ou $x = \frac{1}{11}$

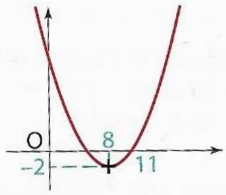
Seconde **AP Trinôme 2 – Etudier une fonction trinôme - Soutien**

108 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + 3x + 1$$

a) Comment sait-on que g admet un maximum ?
b) Calculer $g(0)$ et $g(3)$.
c) En déduire la valeur de x pour laquelle g atteint son maximum. Calculer ce maximum.

107 Une fonction polynôme f de degré 2 est représentée dans le repère ci-dessous.



Jérémy affirme : « Je connais alors les solutions de l'équation $f(x) = 0$ ». Comment procède-t-il ?

Ex 1 : Soit la fonction trinôme définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$.

(a) Résoudre $f(x) = 7$
(b) En déduire les variations de f.

109 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

a) Les trois tableaux de variation donnés ci-dessous sont erronés. Pourquoi ?

Nora

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f(x)$	↗	0 ↗	-18	↘

Florian

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$
$f(x)$	↘	-10 ↗	0	↗

Lily

x	$-\infty$	0	1	6	$+\infty$
$f(x)$	↘	0 ↘	-10 ↗	0	↗

b) Dresser le tableau de variation de f.

Ex 2 : On donne le tableau de variation d'une fonction trinôme f.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	↗	-2	↘

Déterminer une expression possible pour $f(x)$.

REPONSES :

107 : La parabole a pour sommet $S(8\,;\,-2)$ donc elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 8$. Donc si $f(x) = 0$ pour $x = 11$ (à 3 unités de l'axe de symétrie) par symétrie, $f(x) = 0$ aussi pour $x = 5$.

108 : (a) g est une fonction trinôme et le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc la fonction admet un maximum car sa courbe représentative est une parabole « tournée vers le bas ».
(b) $g(0) = 1$ et $g(3) = -3^3 + 3 \times 3 + 1 = 1$.
(c) On a $g(0) = g(3)$, donc, par symétrie de la parabole, le maximum de g est atteint en $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$.
Ce maximum vaut $g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 1 = \frac{13}{4}$

109 : a) f est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 2$, positif, donc sa courbe représentative est une parabole « tournée vers le haut ». Ce qui élimine le tableau 1. De plus $f(0) = 0$ et $f(6) = 0$ (correct dans les tableaux). Donc le minimum de f est atteint en $x = \frac{0+6}{2} = 3$. Ce qui élimine chacun des deux autres tableaux.
b) Le tableau correct est :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-18	↗

Ex 1 :
(a) $f(x) = 7$ s'écrit $3x^2 - 4x + 7 = 7$ et donc $3x^2 - 4x = 0$ d'où $x(3x - 4) = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}$.
(b) f est une fonction trinôme et le coefficient du terme de degré 2 est positif, donc la fonction admet un minimum car sa courbe représentative est une parabole « tournée vers le haut ». Comme $f(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$ le sommet de la parabole a pour abscisse $x = \frac{0+\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$. Enfin $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{3}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{17}{3}$	↗

Ex 2 : $f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ ou $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec a négatif (parabole tournée vers le bas) et le sommet de la parabole qui la représente a pour coordonnées : $\left(\frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right)$ ce qui nous donne les valeurs de α et β de la forme canonique.
D'où $f(x) = a\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}$ avec $a < 0$

Seconde

AP Trinômes 2 – Etudier une fonction trinôme

Approfondissement

Exercice 1 : Comparer sans calculatrice $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{7+2\sqrt{15}}$.

Exercice 2 : Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+4x+3$. (Démontrer les variations).

Exercice 3 : ABC est un triangle isocèle en A et de hauteur $[AH]$ avec $BC=6\ cm$ et $AH=5\ cm$. M est un point du segment $[BH]$ et N, P, Q les points des segments respectifs $[AB]$, $[AC]$, $[CH]$ tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle. Où faut-il placer le point M pour que l'aire de ce rectangle soit maximale ?

REPONSES :

Ex 1 : On compare leurs carrés : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=3+2\sqrt{15}+5=8+2\sqrt{15}$

Et $\sqrt{7+2\sqrt{15}}^2=7+2\sqrt{15}$ donc $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2>\left(\sqrt{7+2\sqrt{15}}\right)^2$

Or ces deux nombres sont positifs, donc rangés dans le même ordre que leurs carrés. D'où $\sqrt{3}+\sqrt{5}>\sqrt{7+2\sqrt{15}}$.

Ex 2 : la forme canonique de f (à justifier) est $-2(x-1)^2+5$. (on peut aussi résoudre $f(x)=3$ et en déduire les coordonnées du sommet de la parabole par symétrie).

- **Variations sur $]-\infty;\mathbf{1}]$:** Si on prend deux réels $x_1<x_2$ dans $]-\infty;\mathbf{1}]$ **on a** $\boldsymbol{x_1<x_2\leq 1}$

Donc $\boldsymbol{x_1-1<x_2-1\leq 0}$

Les carrés de ces deux nombres sont donc rangés en ordre contraire puisque la fonction carré est décroissant sur les nombres négatifs : $(x_1-1)^2>(x_2-1)^2\geq 0$

D'où $-2(x_1-1)^2<-2(x_2-1)^2\leq 0$ (on multiplie par -2 qui est négatif, ce qui change le sens de l'inégalité)

Enfin $-2(x_1-1)^2+5<-2(x_2-1)^2+5\leq 5$. C'est-à-dire $f(x_1)<f(x_2)\leq 5$.

f est donc croissante sur $]-\infty;\mathbf{1}]$.

- De même elle est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ (le détailler).
- D'où le tableau :

x	- ∞		1		+ ∞
$f(x)$		↗	5	↘	

Ex 3 : On appelle $x=MH$. On a alors : $BM=CQ=3-x$ et $NM=PQ=\frac{5(3-x)}{3}$ (Thalès dans ABH) donc la hauteur de ANP est $5-\frac{5(3-x)}{3}=\frac{5}{3}x$. Alors $A_{MNPQ}=A_{ABC}-A_{ANP}-A_{BNM}-A_{PQC}=15-\frac{5}{3}x^2-\frac{(3-x)5(3-x)}{3}=\frac{30x-10x^2}{3}$

On étudie donc les variations de la fonction trinôme $f(x)=\frac{30x-10x^2}{3}=\frac{10x(3-x)}{3}$. La parabole représentant cette fonction est « tournée vers le haut » car le coefficient de x^2est $-\frac{10}{3}$. f a donc un maximum.

Les solutions de $f(x)=0$ sont $0\ et\ 3$ donc le maximum de la fonction est atteint pour $x=\frac{3}{2}$. Il faut donc placer au milieu entre B et H.

Attention, on aurait pu poser $BM=x$, la fonction n'aurait pas forcément été la même mais en revanche le maximum oui.