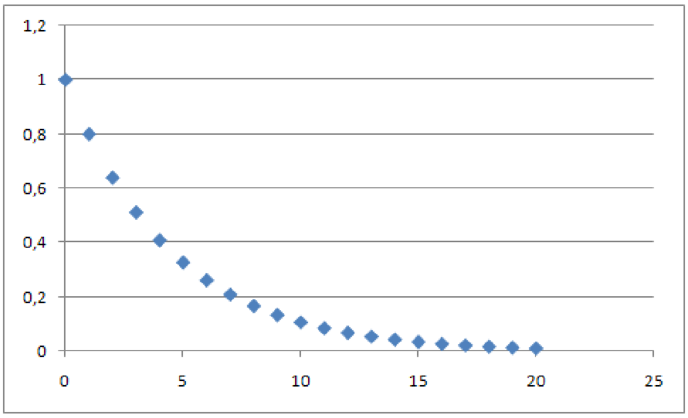
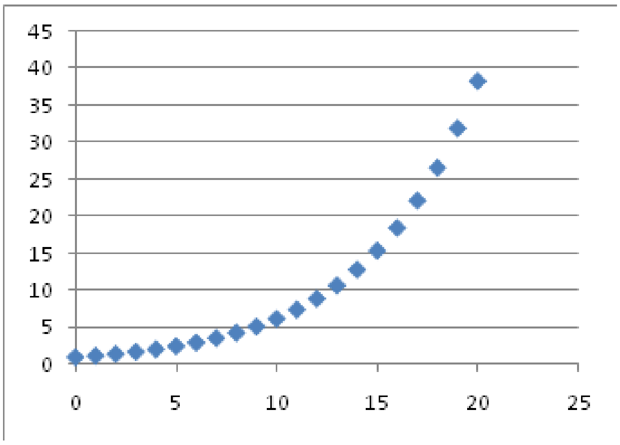
TL **Activité de recherche : fonctions exponentielles**

On souhaite déterminer la fonction réelle f, définie et continue sur $\mathbb{R}$, « associée » à la suite géométrique $q^n, n \geq 0$.

Exemples : $0{,}8^n$ $1{,}2^n$





On pose $f(n) = q^n$ pour tout entier naturel n.
Pour tous entiers naturels m et n, on a $q^{m+n} = q^m \times q^n$ donc $f(m+n) = f(m) \times f(n)$.

On veut donc que f vérifie $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, propriété notée P.

Supposons qu'une fonction f vérifie cette propriété.

1. Montrer qu'on a alors $f(0) = 1$ et $f(1) = q$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$.

En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

3. Montrer que $f(1) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$. En déduire que nécessairement, $q \geq 0$.

4. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Montrer qu'on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{f(1)}$, que vaut $f\left(\frac{1}{4}\right)$?

On admet que l'on peut définir ainsi des fonctions qui vérifient P et sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que si f, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie P, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f'(x) = f'(0) \times f(x)$

Ainsi, si une fonction dérivable vérifie la propriété P, alors $f(0) = 1$ et sa dérivée est égale à elle-même à un coefficient près.

Inversement, on peut montrer que si une fonction dérivable vérifie $f' = kf, k \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$ alors f vérifie la propriété P. On appelle ces fonctions les **fonctions exponentielles.**

7. Une fonction qui vérifie $f' = kf, k \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$ étant donnée, à quelle suite géométrique elle est associée ?

Nous allons étudier plus en détail la fonction qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.