TL - DM2 - CORRIGE -

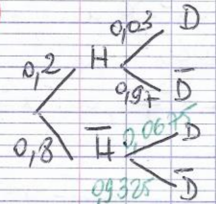
Exercice 1 :

① $P(H) = 0,2$, $P(\overline{H}) = 0,8$

$P(D/H) = 0,03$

$P(D) = 0,06$.

②



③ $P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H})$

d'après la formule des probabilités totales. Soit :

$P(D) = P(D/H)\,P(H) + P(D/\overline{H})\,P(\overline{H})$

$0,06 = 0,03 \times 0,2 + P(D/\overline{H}) \times 0,8$

D'où $P(D/\overline{H}) = \dfrac{0,06 - 0,03 \times 0,2}{0,8}$

$= 0,0675$.

Il y a donc 6,75 % de cadenas défectueux parmi les cadenas premier prix.

④ On cherche la proba que le cadenas soit haut de gamme sachant qu'il est en bon état :

$P(H/\overline{D}) = \dfrac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,2 \times 0,97}{0,94}$

Soit $P(H/\overline{D}) \simeq 0,2064$

Rque : $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,06$
$= 0,94$.

⑤ ⓐ On répète 100 fois de façon indépendante la même expérience à 2 issues : être défectueux ou non. A chaque fois, la probabilité de succès est $P(D) = 0,06$. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli, répété 100 fois, donne pour la variable aléatoire X qui compte le nb de succès (ie à "être défectueux") une loi binomiale de paramètres 100 et 0,06 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100 ; 0,06)$

ⓑ A la calculatrice, on obtient $P(X=6) \approx 0,166$

Calculatrice : distrib binomFdp (100, 0,06, 6)

⑥ ⓐ Loi de Y :

$Y = y_i$	0	7	3
$P(Y=y_i)$	0,06	0,194	0,746
	$P(D)$	$P(H \cap \overline{D})$	$P(\overline{H} \cap \overline{D})$

ⓑ $E(Y) = 0 \times P(Y=0) + 3 \times P(Y=3) + 7P(Y=7)$

$= 3,596$ €

C'est le prix de vente moyen d'un cadenas en euros.

ⓒ Le magasin peut espérer (en moyenne donc) en vendant 500 cadenas :

$500 \times E(Y) = 1798$ €.

Exercice 2 - Partie A -

① On doit dériver f et étudier le signe de f' pour obtenir les variations de f :

$f'(x)=0,00012x^2-0,01x+0,36$.

Signe de $f'(x)$: $\Delta = -0,000728$

donc $\Delta<0$ et $f'(x)>0$ sur $[0;70]$ (si $\Delta<0$, le polynôme est du signe de "a" i.e. $0,00012$)

D'où f est strictement croissante sur $[0;70]$ i.e. la population française va augmenter continuellement pendant 70 ans -

② On doit déterminer le signe de $f''(x)$:

$f''(x)=0,00024x-0,01$.

Donc $f''(x)\geq 0$

$\iff 0,00024x \geq 0,01$

$\iff x \geq \dfrac{0,01}{0,00024} \approx 41,67$ noté α

f est donc convexe sur $[\alpha;70]$ et concave sur $[0;\alpha]$.

Cela signifie que le rythme de croissance démographique accélère après $x=\alpha$ mais ralentit avant (en restant une croissance).

Partie B.

① On s'intéresse à la traduction en équation de $f(x)=g(x)$ -

On a $f(x)=g(x)$

$\iff 0,00004x^3-0,005x^2+0,36x+66 = 0,00008x^3-0,01x^2+0,09x+80$

$\iff -0,00004x^3+0,005x^2+0,27x-14=0$

$\iff 0,00004x^3-0,005-0,27x+14=0$

② ⓐ On a :

$h'(x)=0,00012x^2-0,01x-0,27$

$\Delta = 2,296\times10^{-4}>0$.

Racines : $x_1\approx -21$

$x_2 \approx 105$.

D'où sur $[0;70]$, $h'(x)$ est du signe contraire de a :

x	0	x_0	70
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	14	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-15,68$

ⓑ D'après le tableau de variations (h étant continue et strictement décroissante sur $[0;70]$ avec $f(0)>0$ et $f(70)<0$) et le TVI, l'équation $h(x)=0$ (qui est bien l'équation cherchée) admet une unique solution $x_0\in[0;70]$.

⚠ On ne demande pas de l'approcher -

③ (a)

A	B	B-A	B-A>0,1	X	Y	Y>0
0	70	70	oui	35	0,14	oui
35	70	35	oui	52,5	-8,168	non
35	52,5	17,5	oui	43,75	-4,033	non
35	43,75	8,75	oui	39,375	-1,94	non
35	39,375	4,375	oui	37,1875	-0,89	non
35	37,1875	2,1875	oui	36,09375	-0,378	non
35	36,09375	1,09	oui	35,546875	-0,119	non
35	35,546875	0,54..	oui	35,2734375	0,01	oui
35,2734375	35,546875	0,27	oui	35,41015625	-0,054	non
35,2734375	35,41015625	0,13	oui	35,34179688	-0,0217	non
35,2734375	35,34179688	0,068	Non			

Affichage: $A = 35,2734375$
$B = 35,34179688.$

(b) Cet algorithme sert à encadrer x_0 par deux nombres avec une amplitude de moins de 0,1.
Donc ici $A < x_0 < B$

Cette méthode s'appelle la méthode par DICHOTOMIE.