**Seconde** **Pour le 20/09/2017**

# DM1-Eléménts de correction

## Exercice 1 : Le nombre d'or :

On appelle $\phi$ le nombre $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. A quel ensemble de nombres appartient $\phi$ selon vous ? C'est un réel, irrationnel, à cause de la racine de 5.

2. Vérifier les égalités suivantes :
   (a) $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$

METHODE : Pour démontrer une égalité, il faut éviter de commencer par l'écrire…

Ici on va calculer les deux membres de l'égalité séparément :

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{(1-\sqrt{5})}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

D'autre part, $\phi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   (b) $\phi^3 = 2\phi + 1$

On peut calculer $\phi^3$et $2\phi + 1$ séparément et on trouvera $2 + \sqrt{5}$, ou utiliser l'expression littérale de la question 1 ainsi :

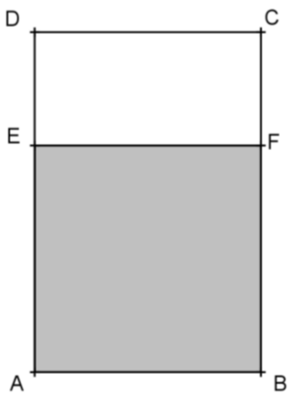
$\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ donc en multipliant des deux côtés de l'égalité par $\phi^2$on obtient : $\phi^2 \times \frac{1}{\phi} = \phi^2(\phi - 1)$

Donc $\phi = \phi^3 - \phi^2$, d'où $\phi^3 = \phi^2 + \phi$

Mais si on multiplie l'égalité du (a) par $\phi$, on obtient : $1 = \phi^2 - \phi$ et donc $\phi^2 = \phi + 1$ (égalité du (c)).

Ce qui donne $\phi^3 = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$ et nous avons l'égalité voulue.

   (c) $\phi^2 = \phi + 1$ : prouvée au (b) ou calculer séparément les deux côtés de l'égalité pour trouver $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$




3. *Le format d'un rectangle est le rapport : $format = \frac{longueur}{largeur}$.

On considère un rectangle $ABCD$ de format $\phi$. (on pourra considérer que $AD = \phi$ et $AB = 1$)

Le rectangle $EFCD$ est obtenu en découpant le carré $AEFB$ du rectangle d'origine $ABCD$.

Quel est le format du rectangle $EFCD$?

Si on considère que $AD = \phi$ et $AB = 1$ alors $CF = \phi - 1$ et le format du rectangle $EFCD$ est $\frac{EF}{CF} = \frac{1}{\phi-1} = \phi$ car d'après la question précédente $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ donc en inversant $\phi = \frac{1}{\phi-1}$.

4. Rechercher quelques domaines dans lesquels on retrouve ce nombre d'or : Art, architecture, même dans la nature… donner quelques exemples aurait été bon…

## Exercice 2 : Triplets pythagoriciens

On appelle triplets pythagoriciens un ensemble de trois entiers naturels qui peuvent être les côtés d'un triangle rectangle.

**1.** Rappeler rapidement pourquoi les nombres $3, 4\ et\ 5$ forment un triplet pythagoricien.

On a $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ et $5^2 = 25$ Donc les nombres $3, 4\ et\ 5$ forment bien un triplet pythagoricien.

**2.** Compléter le tableau suivant :

| Nombre $n$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}(n^2-1)$ | 12 | 17,5 | 24 | 31,5 | 40 | 49,5 | 60 | 84 |
| $\frac{1}{2}(n^2+1)$ | 13 | 18,5 | 25 | 32,5 | 41 | 50,5 | 61 | 85 |
| Triplet pythagoricien ? | oui | non | oui | non | Oui | Non | Oui | Oui |

**3.** **(a)** Ces triplets sont-ils tous pythagoriciens ?

Non

**(b)** Pourquoi certains cas ne fonctionnent-ils pas ?

Car les nombres $n$ de départ étant pairs, $(n^2-1)$ et $(n^2+1)$ sont impairs donc $\frac{1}{2}(n^2-1)$ et $\frac{1}{2}(n^2+1)$ ne sont pas entiers.

**(c)** *Prouver par un calcul littéral que (dans les autres cas on obtient toujours un triplet pythagoricien, quelle que soit la valeur de $n$ choisie au départ.

Il faut montrer que pour tout entier $n$ on a bien l'égalité :

$$\left(\frac{1}{2}(n^2-1)\right)^2 + n\text{^}2 = \left(\frac{1}{2}(n^2+1)\right)^2$$

Or $\left(\frac{1}{2}(n^2-1)\right)^2 + n^2 = \frac{1}{4}(n^4 - 2n^2 + 1) + n^2 = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4} + n^2 = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{2}n^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}$

Et d'autre part : $\left(\frac{1}{2}(n^2+1)\right)^2 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^2 + 1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}$

L'égalité étant toujours vraie, les triplets doivent alors seulement être des nombres entiers pour être des triplets pythagoriciens. Ce qui sera vrai dès que $n$ est impair…

En effet (cette preuve n'était pas attendue dans le DM, l'explication est donnée pour ceux qui cherchent à comprendre chaque point) :

Si $n$ est impair, on peut l'écrire $2k+1$ avec $k$ un entier naturel.

Donc $\frac{1}{2}(n^2-1) = \frac{1}{2}((2k+1)^2-1) = \frac{1}{2}(4k^2+4k+1-1) = \frac{1}{2}(4k^2+4k) = 2k^2+2k = 2(k^2+k)$ qui est bien entier (et pair).

Et de même $\frac{1}{2}(n^2+1) = \frac{1}{2}((2k+1)^2+1) = \frac{1}{2}(4k^2+4k+1+1) = \frac{1}{2}(4k^2+4k+2) = 2k^2+2k+1$ qui est bien un entier (mais impair celui-ci).