Calculs de dérivées- Corrigé

Exercice 13 p 79 :
$f(x) = x^2 - 3x + 7$ pour $x \in \mathbb{R}$
$f\,'(x) = 2x - 3 \times 1 + 0 = 2x - 3$
car la dérivée d'une somme ou différence de fonctions est la somme ou la différence des dérivées de ces fonctions (la dérivée de $u + v$ est $u\,' + v\,'$, la dérivée de $u - v$ est $u\,' - v\,'$) et
la dérivée de x^2 est $2x$, la dérivée de x est 1 et si une fonction $u(x)$ est multipliée par un nombre (3) alors sa dérivée est multipliée par ce même nombre : la dérivée de $k \times u$ est $k \times u'$ où k est un nombre réel et u une fonction dérivable de dérivée u'

Exercice 14 p 79 :
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - \frac{5}{2}$, pour $x \in \mathbb{R}$
$f\,'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 3 \times 1 - 0 = 6x^2 - 10x + 3$
On utilise les mêmes propriétés qu'à l'exercice 13 et la dérivée de $\frac{5}{2}$ est 0 car $\frac{5}{2}$ est un nombre réel (=2,5).

Exercice 15 p 79 :
$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$, pour $x \in]0; +\infty[$
On a $f(x) = x^2 - 2 \times \frac{1}{x}$ donc
$f\,'(x) = 2x - 2 \times \frac{-1}{x^2} = 2x - \frac{2}{1} \times \frac{-1}{x^2} = 2x + \frac{2}{x^2}$
car la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $\frac{-1}{x^2}$ et quand on multiplie des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
Remarque : on peut aussi dériver $\frac{2}{x}$ avec la formule de dérivée de $\frac{u}{v}$ mais c'est plus long : $\frac{2}{x}$ est du type $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x$ donc $u'(x) = 0$ et $v\,'(x) = 1$, donc, comme la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient : $f\,'(x) = 2x - \frac{0 \times x - 2 \times 1}{x^2} = 2x - \frac{-2}{x^2} = 2x + \frac{2}{x}$

Exercice 16 p 79 :
$f(x) = x + \sqrt{x}$, pour $x \in]0; +\infty[$
$f\,'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Car la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$

Exercice 17 p 79 :

$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{3}$, pour $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2\times 2x+1+0}{3} = \frac{4x+1}{3}$

car quand une fonction est divisée par un nombre, sa dérivée est divisée par ce même nombre, c'est la même propriété que pour les multiplications car diviser par un nombre équivaut à multiplier par l'inverse de ce nombre.

Remarque : on peut aussi dériver f avec la formule de dérivée de $\frac{u}{v}$ mais c'est plus long :

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + x + 7$ et $v(x) = 3$ donc $u'(x) = 2 \times 2x + 1 = 4x + 1$ et $v'(x) = 0$ et la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ donc : $f'(x) = \frac{(4x+1)\times 3-(2x^2+x+7)\times 0}{3^2} = \frac{(4x+1)\times 3}{3^2} = \frac{4x+1}{3}$ en divisant le numérateur et le dénominateur par 3.

Exercice 18 p 79 :

$f(x) = 2x^3 + 3x - \sqrt{5}$, pour $x \in [0; +\infty[$

$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 - 0 = 6x^2 + 3$

car $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ est un nombre réel et tous les nombres réels ont pour dérivée 0 : si $k \in \mathbb{R}$, $(k)' = 0$

Exercice 19 p 80 :

$f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$

$f(x) = 3 \times \frac{1}{x^2} - 2 \times \frac{1}{x}$ car $3 \times \frac{1}{x^2} - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{x^2} - \frac{2}{1} \times \frac{1}{x}$ et

$f(x) = 3 \times \frac{1}{u(x)} + 2 \times \frac{1}{x}$ avec $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$ donc on a

$f'(x) = 3 \times \frac{-u'(x)}{u(x)^2} - 2 \times \frac{-1}{x^2} = 3 \times \frac{-2x}{(x^2)^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{-6x}{x^4} + \frac{2}{x^2} = \frac{-6}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

Remarque : on peut aussi dériver f en utilisant 2 fois la formule de dérivée de $\frac{u}{v}$ mais c'est plus long :

$\frac{3}{x^2}$ est du type $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3$ et $v(x) = x^2$ donc $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2x$ et la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$, donc on obtient la dérivée de $\frac{3}{x^2}$: $\frac{0\times x^2-3\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-6x}{(x^2)^2}$

et $\frac{2}{x}$ est du type $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x$ donc $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 1$ et la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$, donc on obtient la dérivée de $\frac{2}{x}$: $\frac{0\times x-2\times 1}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$

Enfin, $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2)^2} - \frac{-2}{x^2} = \frac{-6x}{x^4} + \frac{2}{x^2} = \frac{-6}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

Exercice 20 p 80 :

$f(x) = x\sqrt{x}$, pour $x \in]0; +\infty[$

f est du type $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

Mais $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ car, par définition, $\sqrt{x}$ est le nombre positif qui, au carré, donne x.

Donc $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{x}}{1} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{2\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

<u>Exercice 21 p 80 :</u>
$f(x) = x^2(2x - x^3)$, pour $x \in \mathbb{R}$
f est du type $u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x - x^3$ donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2 - 3x^2$
La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc $f'(x) = 2x \times (2x - x^3) + x^2 \times (2 - 3x^2)$
$f'(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2x^2 - 3x^4 = -5x^4 + 6x^2$
Remarque : C'est plus simple de développer $f(x)$ d'abord et dériver après :
$f(x) = x^2(2x - x^3) = 2x^3 - x^5$ et donc $f'(x) = 6x^2 - 5x^4$

<u>Exercice 22 p 80 :</u>
$f(x) = 2x^3(3 - \sqrt{x})$, pour $x \in]0; +\infty[$
f est du type $u \times v$ avec $u(x) = 2x^3$ et $v(x) = 3 - \sqrt{x}$ donc $u'(x) = 6x^2$ et $v'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc $f'(x) = 6x^2 \times (3 - \sqrt{x}) + 2x^3 \times (-\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 18x^2 - 6x^2\sqrt{x} - \frac{2x^3}{2\sqrt{x}} \\ &= 18x^2 - 6x^2\sqrt{x} - \frac{x^2\times x}{\sqrt{x}} \\ &= 18x^2 - 6x^2\sqrt{x} - \frac{x^2\times\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= 18x^2 - 6x^2\sqrt{x} - x^2\times\sqrt{x} \\ &= 18x^2 - 7x^2\sqrt{x} \\ &= x^2(18 - 7\sqrt{x}) \end{aligned}$$

<u>Exercice 23 p 80 :</u>
$f(x) = 2x^3 - 5x(x - 2\sqrt{x})$, pour $x \in]0; +\infty[$
$f(x) = 2x^3 - u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 5x$ et $v(x) = x - 2\sqrt{x}$ donc $u'(x) = 5$ et
$v'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc $f'(x) = 6x^2 - \left(5 \times \left(x - 2\sqrt{x}\right) + 5x \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 5 \times \left(x - 2\sqrt{x}\right) + 5x \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 6x^2 - 5x + 10\sqrt{x} + 5x - \frac{5x}{\sqrt{x}} \\ &= 6x^2 + 10\sqrt{x} - 5\sqrt{x} \\ &= 6x^2 + 5\sqrt{x} \end{aligned}$$

<u>Exercice 24 p 80 :</u>
$f(x) = (x^2 + 1)^2$, pour $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = (x^2 + 1) \times (x^2 + 1)$ est du type $u \times v$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$ donc
$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x$
La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc
$f'(x) = 2x \times (x^2 + 1) + (x^2 + 1) \times 2x$

$= 2x^3 + 2x + 2x^3 + 2x$
$= 4x^3 + 4x$

Remarque : on peut aussi développer f avant de la dériver,
on rappelle que $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$:
$f(x) = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times 1 + 1^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ et $f\,'(x) = 4x^3 + 4x$

Exercice 25 p 80 :

$f(x) = \left(\sqrt{x} + 2\right)^2$, pour $x \in]1; +\infty[$
$f(x) = \left(\sqrt{x} + 2\right) \times \left(\sqrt{x} + 2\right)$ est du type $u \times v$ avec $u(x) = \sqrt{x} + 2$ et $v(x) = \sqrt{x} + 2$ donc $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc
$f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(\sqrt{x} + 2\right) + \left(\sqrt{x} + 2\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Exercice 26 p 80 :

$f(x) = (3x^3 - x + 5)^2$, pour $x \in]1; +\infty[$
$f(x) = (3x^3 - x + 5) \times (3x^3 - x + 5)$ est du type $u \times v$ avec $u(x) = 3x^3 - x + 5$ et $v(x) = 3x^3 - x + 5$ donc $u'(x) = 9x^2 - 1$ et $v'(x) = 9x^2 - 1$
La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc

$$f\,'(x) = (9x^2 - 1) \times (3x^3 - x + 5) + (3x^3 - x + 5) \times (9x^2 - 1)$$
$$= 2(3x^3 - x + 5) \times (9x^2 - 1)$$

Exercice 27 p 80 :

$f(x) = \frac{3}{x^2+2}$, pour $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 3 \times \frac{1}{x^2+2} = 3 \times \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2$ donc $u'(x) = 2x$ et la dérivée de $\frac{1}{u}$ est $\frac{-u'}{u^2}$ donc
$f\,'(x) = 3 \times \frac{-2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-6x}{(x^2+2)^2}$

Exercice 28 p 80 :

$f(x) = \frac{5}{x^3+x+2}$, pour $x \in [1; +\infty[$
$f(x) = 5 \times \frac{1}{x^3+x+2} = 5 \times \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = x^3 + x + 2$ donc $u'(x) = 3x^2 + 1$ et la dérivée de $\frac{1}{u}$ est $\frac{-u'}{u^2}$ donc $f\,'(x) = 5 \times \frac{-(3x^2+1)}{(x^3+x+2)^2}$

Exercice 29 p 80 :

$f(x) = \frac{3-x}{x+1}$, pour $x \in]-1;+\infty[$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3 - x$ donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = x + 1$ donc $v'(x) = 1$. La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f\,'(x) = \frac{-1\times(x+1)-(3-x)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-3+x}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$

Exercice 30 p 80 :

$f(x) = \frac{x^2+2x}{1-x}$, pour $x \in]-\infty;1[$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 2x$ donc $u'(x) = 2x + 2$ et $v(x) = 1 - x$ donc $v'(x) = -1$.

La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ donc

$f\,'(x) = \frac{(2x+2)\times(1-x)-(x^2+2x)\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x+2-2x^2-2x+x^2+2x}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(1-x)^2}$

Exercice 31 p 80 :

$f(x) = \frac{4-2x}{x^2+2}$, pour $x \in \mathbb{R}$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 4 - 2x$ donc $u'(x) = -2$ et $v(x) = x^2 + 2$ donc $v'(x) = 2x$.

La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ donc

$f\,'(x) = \frac{(-2)\times(x^2+2)-(4-2x)\times(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2-4-(8x-4x^2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2-4-8x+4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2-8x-4}{(x^2+2)^2}$

Exercice 32 p 80 :

$f(x) = \frac{x^2+2}{1-x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 2$ donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = 1 - x^2$ donc $v'(x) = -2x$.

La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ donc

$f\,'(x) = \frac{2x\times(1-x^2)-(x^2+2)\times(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3-(-2x^3-4x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3+4x}{(1-x^2)^2} = \frac{6x}{(1-x^2)^2}$

Exercice 33 p 80 :

$f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$, pour $x \in]0;+\infty[$

f est du type $u \times v$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

La dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ donc $f\,'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 3 \times \sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\times\sqrt{x}}{1} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\times\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$