1ère ES/L Novembre 2012

Suites réelles

I- Généralités :

1.1 Définition :

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels :

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n)$ noté u_n.

u_n est le terme de rang n ou d'indice n de la suite.

La suite est le plus souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même u.

On peut définir une suite de façon explicite (ie en connaissant la « formule » permettant de calculer n'importe quel terme) ou par récurrence (un terme est défini par rapport à celui ou ceux qui le précèdent) :

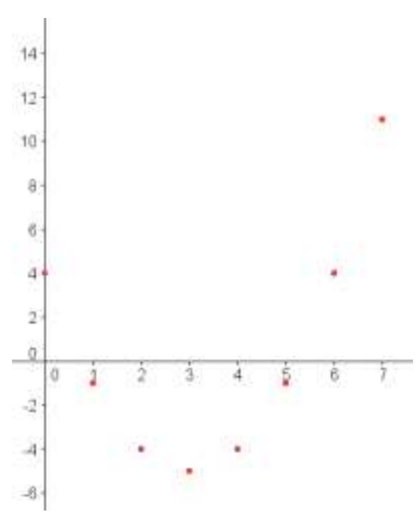
Ex1 : $u_n = (-1)^n + 2n + 3$ pour tout entier naturel n

Ex 2 : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = (n+1)v_n$ pour tout entier naturel n (Suite des factorielles, notée $n!$).

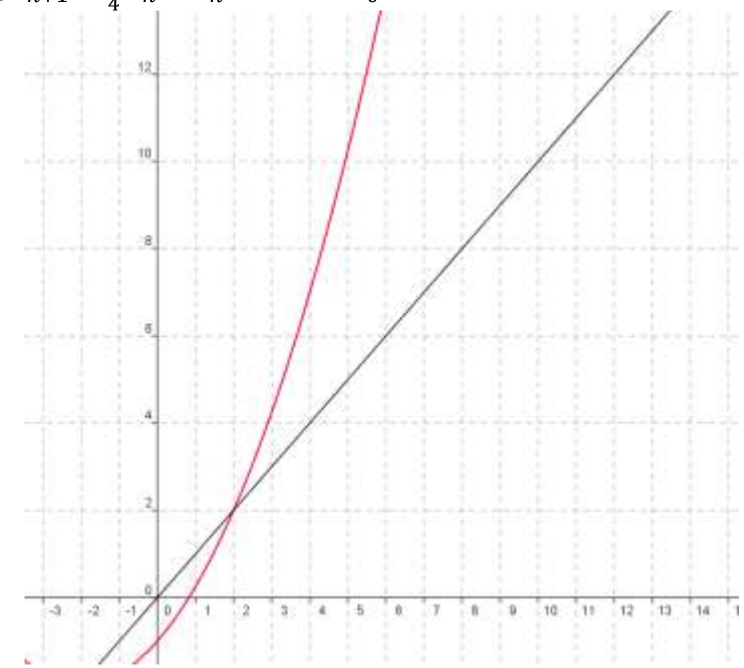
1.2 Représentation graphique :

Comme toute fonction, une suite possède une représentation graphique, constituée d'un ensemble de points ne formant pas une ligne continue (on parle de phénomène discret)

Exemple 1 : $u_n = n^2 - 6n + 4$



Exemple 2 : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + u_n - 1$, avec $u_0 = 3$



1.3 Suites monotones :

Une suite est dite strictement **croissante** si pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} > u_n$.
Une suite est dite strictement **décroissante** si pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} < u_n$.
On parle alors d'une suite **monotone**.

- Les suites ne sont bien entendu pas toutes monotones, et certaines le sont mais à partir d'un certain rang seulement.

- Lorsque la suite est définie explicitement par une fonction f $\left(ie\ u_n = f(n)\right)$ alors la monotonie de la suite peut facilement se prouver en étudiant les variations de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, on peut également utiliser le critère suivant :

$$(u_n)_n \text{est strictement décroissante } \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

II-Suites arithmétiques :

2.1 Définition :

Soit r un réel tel que pour tout entier naturel n on ait
$u_{n+1} = u_n + r$. Alors la suite est dite arithmétique, de raison r.

La suite des entiers est arithmétique de raison 1, la suite des entiers pairs est arithmétique de raison 2

2.2 Terme général :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Alors le terme général de cette suite est donné par : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Csq : les suites arithmétiques sont exactement les suites affines.

- Le lien entre les termes de rangs n et p est donné par : $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

Graphiquement : Les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

2.3 Variations :

Une suite arithmétique est :
- strictement croissante si sa raison est strictement positive ;
- strictement décroissante si sa raison est strictement négative ;
- constante si sa raison est nulle.

2.4 Somme de termes consécutifs :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- La somme des termes de cette suite du rang p au rang n (avec $p < n$) est :

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (nombre\ de\ termes) \times \frac{premier + dernier}{2}}$$

Attention au nombre de termes : de u_7 à u_{10}, il y a 4 termes $(10 - 7 + 1 = 4)$

- En particulier, la somme des premiers termes est :

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}}$$

- Somme des n premiers entiers :

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$