2nde

Probabilités

« L'improbable a toutes les chances de se produire » Aristote

« L'amour est un phénomène d'auto suggestion réciproque unissant deux êtres pour un temps dont la durée ne peut se mesurer qu'à l'aide du calcul de probabilités » Jean Simard

Au début du XVIème siècle, Jérôme Cardan écrit un traité « de Ludo Alea »relatif au jeu de dés. L'étude des problèmes de dés se poursuit au XVIIème avec Galilée et le Chevalier de Méré qui soumet de nombreux problèmes à Blaise Pascal (1623-1662). C'est ce dernier qui introduit le concept de probabilité dans sa correspondance avec Pierre Fermat. Au XVIIIème siècle, de nombreux mathématiciens, Moivre, Leibniz, Bayes poursuivent la mise au point des concepts de probabilités puis au XIXème les Russes Markov, Tchebychev. Ce n'est qu'en 1933 que le Russe Andreï Kolmogorov met en place une théorie mathématique des probabilités.

Exemple d'introduction : Dans un parc se trouvent 3 bancs de deux places. Deux personnes arrivent dans ce par cet choisissent une place au hasard. Quelle est la probabilité que ces deux personnes s'assoient côte à côte ?

I- Vocabulaire des événements :

a- Univers, événements :

Définitions :

- Une **issue** d'une expérience aléatoire est un résultat possible de cette expérience.
- L'ensemble de toutes les issues possibles est appelée univers associé à l'expérience.

On le note souvent **Ω** (oméga).

- Un événement est une **partie** (un **sous-ensemble**) de l'ensemble Ω. On dit qu'une issue **réalise** un événement A lorsque cette issue est un résultat appartenant à la partie A.

Evénements particuliers :

- Evénement impossible : c'est l'ensemble vide, aucune issue ne le réalise.
- Evénement certain : c'est l'univers Ω, toutes les issues le réalisent.
- Evénement élémentaire : formé d'une seule issue.

Exemple : lancer d'un dé à 6 faces. On note le nombre qui apparait sur la face supérieure.

b- Intersection, réunion, événement contraire :

Soient A et B deux événements.

- **L'intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'evt constitué des issues qui réalisent A et B en même temps.
- Dans le cas où A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps, ie $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles**, ou **disjoints**.
- La réunion de A et B, notée $A \cup B$, A ou B, est l'evt constitué des issues qui réalisent A ou B, ie au moins l'un des deux .
- L'evt contraire de A, noté $\bar{A}$ (A barre), est l'evt constitué de toutes les issues de **Ω** qui ne réalisent pas A.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note A « la carte est un cœur », B « la carte est un roi ». Décrire par une phrase et un ensemble les evts, A ou B, A et B, A. Combien d'issues réalisent A ?

II- Probabilité sur un ensemble fini :

a- Loi de probabilité :

Soit une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega=\{e_1 ; e_2 ; .... ; e_n\}$

- Définir une loi de probabilité sur **Ω**, c'est attribuer à chaque issue élémentaire e_i un nombre réel positif ou nul p_i de telle sorte que $p_1 + p_2 +\ldots+ p_n = 1$.
- Le nombre p_i est appelé probabilité de l'evt élémentaire e_i : $p(\{e_i\}) = p_i$.
- Si $A = \{e_1 ; e_3\}$ alors la probabilité de l'événement a est $p(A)= p_1+ p_3$.

La probabilité de l'evt certain est 1 : $P(\Omega) = 1$

La probabilité de l'evt impossible est nulle : $P(\emptyset) = 0$

Pour tout evt A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$

Exemple : Définir par un tableau une loi de probabilité d'un dé à 6 faces pipé, puis calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

b- Lien avec les fréquences : approche intuitive de la loi des grands nombres :

Si on effectue une expérience aléatoire *n* fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un événement se stabilise lorsque *n* devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe qui est égal à la probabilité de cet événement.

C'est ainsi que l'on arrive à valider un certain nombre de modélisations d'expériences.

(Voir TP pour loi des grands nombres et exemple des bancs publics pour la difficulté du choix d'une modélisation).

III- Calculs de probabilité :

a- Equiprobabilité sur un ensemble fini :

- Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation **d'équiprobabilité** sur Ω.
- En situation d'équiprobabilité, en notant *n* le nombre d'issues de Ω, chaque événement élémentaire a pour probabilité : $P(A) = \frac{1}{n}$

➡ Par convention des expressions telle que « dé équilibré, tirage au hasard, jetons indiscernables au toucher… » indiquent que le modèle choisi est celui de l'équiprobabilité.

En cas d'équiprobabilité sur un univers Ω, la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ à\ la\ réalisation\ de\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$$

b- Réunion, intersection et événement contraire :

Pour tous événements A et B on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Par conséquent, si A et B sont <u>incompatibles</u> :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- Et pour tout événement A : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$